

投票システムを準備してください

アルゴリズムと計算量

復習: 問題解決とアルゴリズム

(cf. 「情報」7.1.1)

- コンピュータによる問題解決ではアルゴリズムが重要になる



➤いきなりプログラムを書くことはまれ

※問題:

- コンピュータにやらせたいこと全般
- 計算問題から、長期間のサービスまで

例: 銀行
オンラインシステム

※モデル: 問題を抽象化したもの

アルゴリズムの役割

- 時間やメモリに関する性質を考えることができる
 - 良し悪しが分かる → 計算量 (後述)
- 具体的な問題と独立して考えることができる
 - 問題における細かな点を無視して、解法の重要な点だけを考える
 - 異なる問題も同じアルゴリズムで解ける場合がある
- 具体的なプログラムと独立して考えることができる
 - プログラムにおける細かな点を無視して考えられる
 - 特定のプログラミング言語に依らない

アルゴリズムによる 実行時間の違い

- アルゴリズムによる計算時間の違いを実際のプログラミングによって調べる
- 問題とアルゴリズム:
 - 平方根の計算: 数え上げ/二分法/ニュートン法
 - フィボナッチ数: 定義通り/数え上げ/行列
 - 最大公約数: 単純なもの/ユークリッドの互除法
 - 整列: 単純ソート/併合ソート

フィボナッチ数の計算

- 問題: フィボナッチ数列の k 番目の数を求める
 - フィボナッチ数列: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...
 - k 番目を f_k と書くと $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$ となる数列
ただし $f_0 = f_1 = 1$
- アルゴリズム
 - 定義通りに計算する方法
 - 0 から順に数え上げる方法
 - 行列を用いる方法

100 番目のフィボナッチ数は

1. 偶数
2. 奇数

フィボナッチ数列: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,...

定義通りに計算する フィボナッチ数

- 定義:
 - k 番目を f_k と書くとき
 - $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$
 - ただし $f_0 = f_1 = 1$
- f_k を関数 `fibr(k)` にすればよい
- 計算時間は?

```
def fibr(k)
  if k==0 || k==1
    1
  else
    fibr(k-1)+fibr(k-2)
  end
end
```

0 から順に数え上げる フィボナッチ数の計算

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
fib(k): f	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
1 つ前: $p1$	—	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
2 つ前: $p2$	—	—	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

0 から順に数え上げる フィボナッチ数の計算

```
def fib1(k)
  f=1
  p1=1
  for i in 2..k
    p2 = p1      #fib(i-2)
    p1 = f       #fib(i-1)
    f = p1 + p2  #fib(i)
  end
  f              #fib(k)
end
```

- 計算時間は?

スピード競争

- 共通資料から、bench.rb と fib.rb をダウンロード。

```
irb(main):004:0> load("./bench.rb")
```

```
irb(main):005:0> load("./fib.rb")
```

```
irb(main):009:0> for k in 10..38
```

```
irb(main):010:1>   run("fibr", k)
```

```
irb(main):011:1>   run("fibr", k)
```

```
irb(main):012:1> end
```

グラフの表示方法を変更するためには `command` という命令を用いる。主な命令には次のものがある。

- `command("set logscale y")` — グラフの Y 軸を対数スケールにする。y を x にすると X 軸が対数スケールになる。
- `command("unset logscale")` — 対数スケールをやめる
- `command("set xrange [a:b]")` — X 軸の範囲を *a* から *b* までにする。xrange を yrange にすると Y 軸の範囲を変更する。
- `command("set autoscale")` — 表示範囲を自動的に変更する。

実際には" "の内側は、グラフの表示に用いている GNUPLOT というソフトウェアに対する命令である。他の命令については GNUPLOT のマニュアルなどを参考にしてほしい。

```
irb(main):026:0> command("set logscale y")
```

```
irb(main):027:0> for k in 10..38
```

```
irb(main):028:1> run("fibr", k)
```

```
irb(main):029:1> end
```

実行時間は、kに関する指数関数...

下6桁のみの計算

```
def fibl6(k)
  f=1
  p1=1
  for i in 2..k
    p2 = p1
    p1 = f
    f = (p1 + p2) % 1000000
  end
  f
end
```

irb(main):030:0> **reset()**

irb(main):031:0> **command("unset logscale")**

irb(main):032:0> **for m in 1..10**

irb(main):033:1> **run("fibl6", 2000000*m)**

irb(main):034:1> **end**

実行時間は、kに関する1次関数

進捗状況の確認

教科書の 5.2.1節と 5.2.2節を実施してください

1. fibl6 の表示までできた時点で、投票してください。

- fibr と fibl

- for k in 10..38

- Fibl6

- run("fibl6", 2000000*m)

数学的知識の確認

高校または大学(線形代数)で行列について勉強しましたか？

1. 高校でも大学でも教わった
2. 高校では聞いていないが，大学で教わった
3. 高校では教わったが，大学ではまだ
4. 高校でも大学でも聞いていない

行列を用いるフィボナッチ数の計算法

- (f_{k+1}, f_k) をベクトルだと思おうと

$$\begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k-1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

という関係がある

数学的知識の確認

高校または大学(線形代数)で行列の固有値について勉強しましたか？

1. 高校でも大学でも教わった
2. 高校では聞いていないが，大学で教わった
3. 高校では教わったが，大学ではまだ
4. 高校でも大学でも聞いていない

行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値は？

1. 0

2. ± 1

3. $\pm \sqrt{2}$

4. $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

5. $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値

行列の固有値 ϕ と固有ベクトル $\mathbf{v}$

$$A\mathbf{v} = \phi\mathbf{v} = \phi I\mathbf{v}$$

$$|A - \phi I| = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 - \phi & 1 \\ 1 & -\phi \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \phi)(-\phi) - 1 = \phi^2 - \phi - 1 = 0$$

$$\therefore \phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

フィボナッチ数 $\text{fib}(k)$ と黄金比 ϕ

フィボナッチ数 $\text{fib}(k)$ と黄金比の k 乗は比例

$$\text{fib}(k) \propto \phi^k$$

より正確には

$$\text{fib}(k) \approx \frac{\phi^{k+1}}{\sqrt{5}}$$

行列を用いるフィボナッチ数の計算法

$$\begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = Q^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

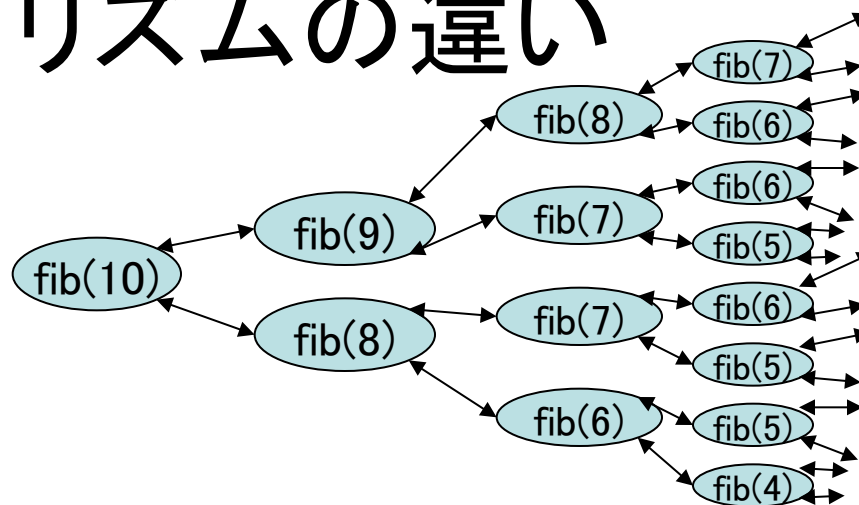
- Q^k を高速に計算する方法はあるか?
- $Q^{2k} = (Q^k)^2$ という関係を利用する
 - 例: $Q^{16} = (Q^8)^2 = ((Q^4)^2)^2 = ((Q^2)^2)^2$ — 2乗を4回

$$Q^k = \begin{cases} E & (k = 0) \\ (Q^{k/2})^2 & (k \text{ is even}) \\ Q(Q^{k-1}) & (k \text{ is odd}) \end{cases}$$

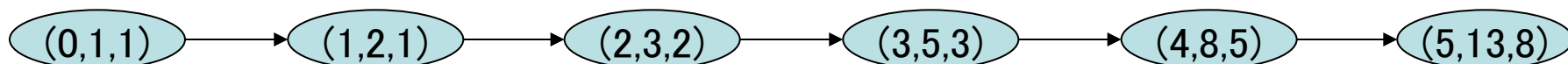
- 再帰的なプログラムになる！

フィボナッチ数の計算: アルゴリズムの違い

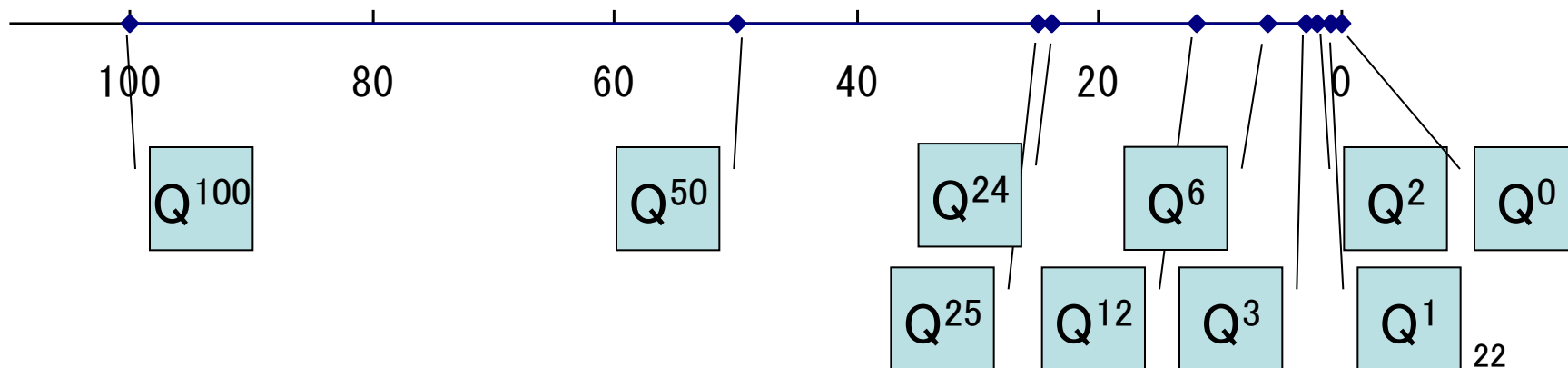
- 定義通り



- 数え上げ



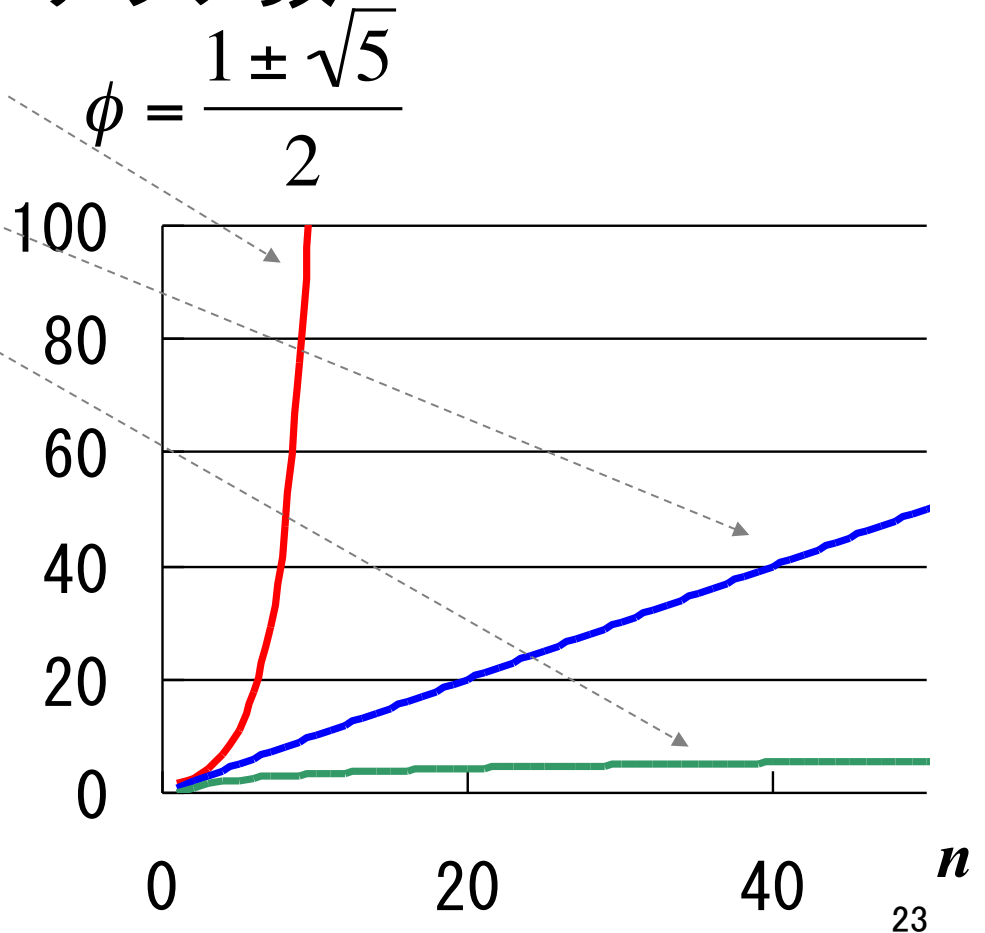
- 行列を使う



計算量を求める: フィボナッチ数

- 問題: n 番目のフィボナッチ数

- 定義通り — $O(\phi^n)$
- 数え上げ — $O(n)$
- 行列 — $O(\log n)$



練習 5.5 (行列の冪乗) 行列 A の冪乗 A^n を計算する関数 `matpower(a,n)` を次のようにして定義せよ。行列は 2×2 のものだけを扱うことにして、2次元配列で表わすことにする。

- a) 行列 a, b の積を求める `matmul(a,b)` を定義せよ。ヒント: 行列を 2×2 に限っているので次のような計算をするだけである。

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00}b_{00} + a_{01}b_{10} & a_{00}b_{01} + a_{01}b_{11} \\ a_{10}b_{00} + a_{11}b_{10} & a_{10}b_{01} + a_{11}b_{11} \end{pmatrix}$$

- b) 行列 a の自乗を求める `matsquare(a)` を定義せよ。

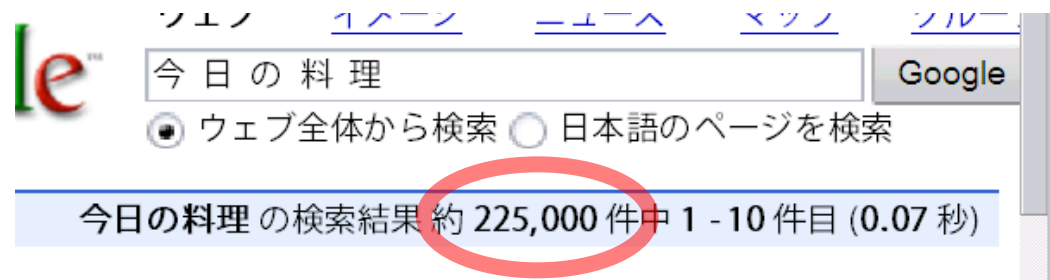
- c) 式 5.11 に従って行列 a の n 乗を求める `matpower(a,n)` を定義せよ。

練習 5.6 (行列を用いた Fibonacci 数の計算) 練習 5.5 で定義した `matpower(a,n)` を用いて `fib(k)` を求める関数 `fibm(k)` を定義せよ。また、`fibm(k)` と `fibl(k)` が同じ答を出すことをいくつかの k について確認せよ。

練習 5.7 (行列を用いた Fibonacci 数の計算 (下 6 桁)) 練習 5.6 で定義した関数を変更し、Fibonacci 数の下位 6 桁のみを求める `fibm6` を定義せよ。時間計測用の配布プログラムを用いて、大きな k に対する `fibm6(k)` の計算時間が $\log k$ に比例していることを確認せよ。

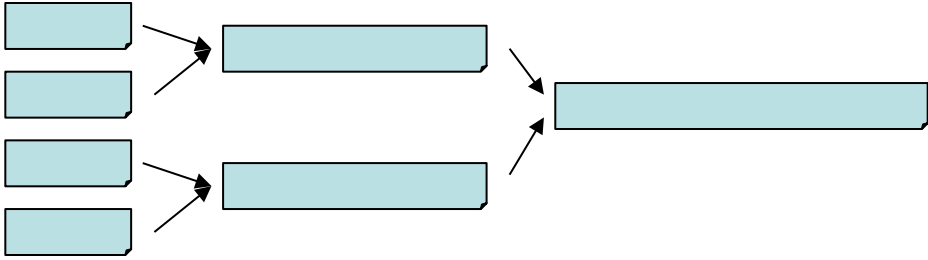
整列 (sorting)

- 問題: n 個のデータを大きさ順に並べる
(単純化): n 個の整数を小さい順に並べる
 - 色々な場面で使われる
 - データの「下ごしらえ」としても使われる
例: 検索を高速化するために整列しておく
- データ数は、時として非常に大きくなる
 - 「全学生の氏名を学生証番号順に表示」
 - 「『今日の料理』という言葉を持つページを信頼度順に表示」



整列アルゴリズム

とても沢山ある

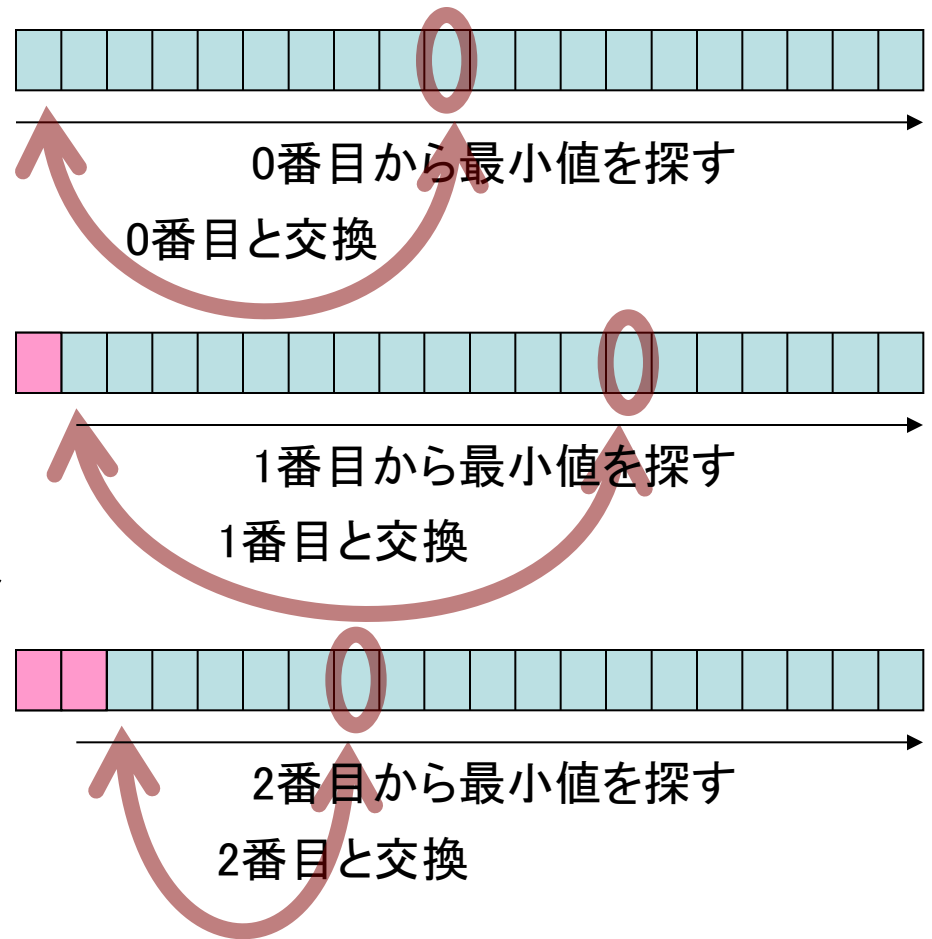
- 単純整列法: 1番小さいものを見つけ、2番目に小さいものを見つけ、...
- 併合整列法: 

The diagram illustrates the merge sort process. On the left, there are four small light blue rectangles stacked vertically. Arrows from the top two rectangles point to a single medium-sized light blue rectangle. Similarly, arrows from the bottom two rectangles point to another medium-sized light blue rectangle. Finally, arrows from these two medium rectangles point to a single large light blue rectangle on the right, representing the final sorted array.
- ビン整列法
- 基数整列法
- クイック整列法

単純整列法

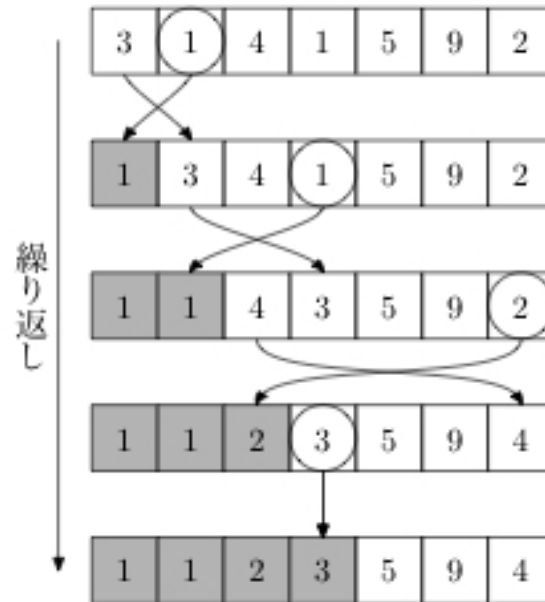
- 方法:

- $i=0,1,2,\dots$ について
列の中で*i*番目に
小さい数を見つけ、
それを*i*番目へ移動
- 「*i*番目に小さい数」は
列の*i*番目以降の
最小値



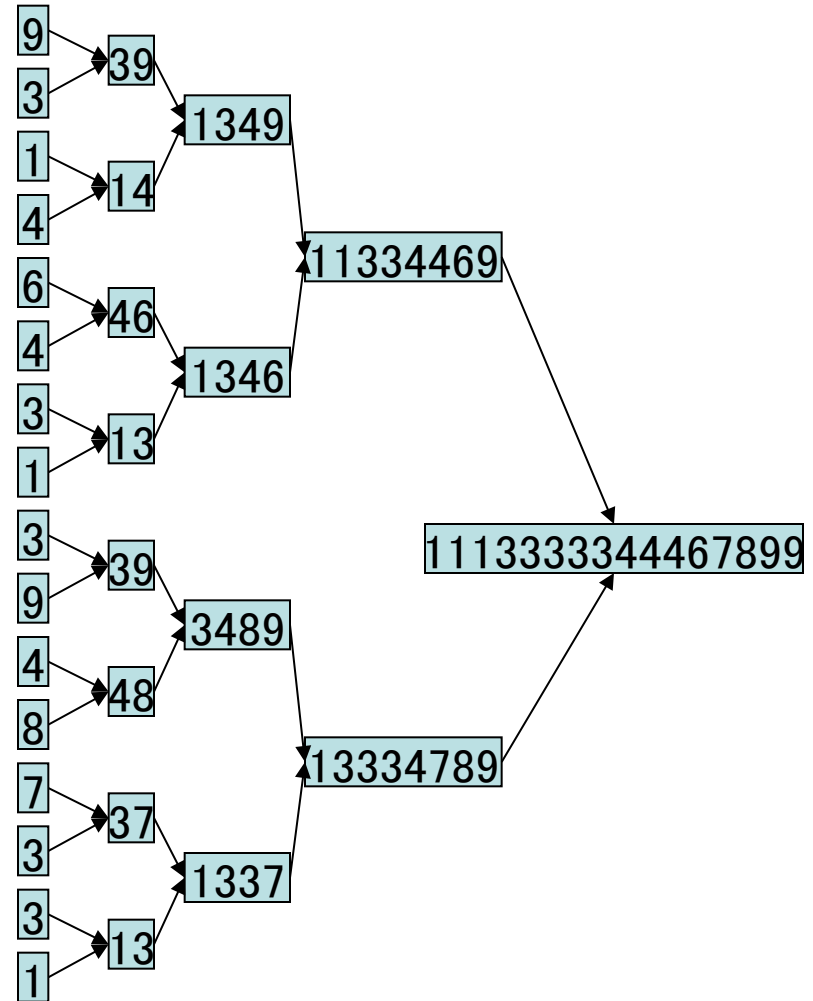
単純整列法

```
def simplesort(a)
  for i in 0..(a.length()-1)
    k = min_index(a,i)
    v = a[k]
    a[k] = a[i]
    a[i] = v
  end
  a
end
```



併合整列法

- 前提:
 - 整列済みの列が
沢山ある
- 方法:
 - 2つの列を順序よく
くっつけて1つにする
(併合)
 - 列が1つになるまで
繰り返す



[3,5,7] と [2,4] を merge すると

1. [2,3,4,5,7]
2. [3,5,7,4,2]
3. [4,2,3,5,7]
4. [3,4,2,5,7]
5. [3,5,4,2,7]

これは merge の正しい使い方です

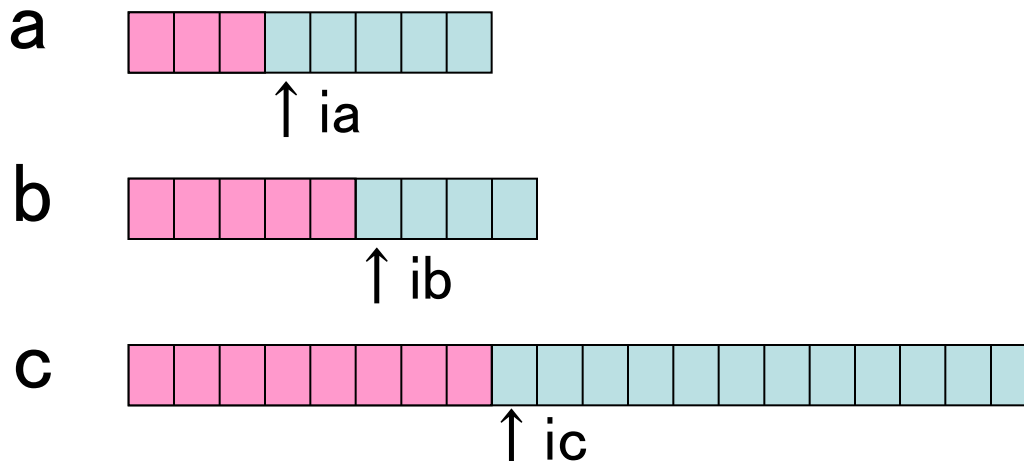
[3,5,7] と [4,2] を merge すると

1. [2,3,4,5,7]
2. [3,5,7,4,2]
3. [4,2,3,5,7]
4. [3,4,2,5,7]
5. [3,5,4,2,7]

これは merge の正しい使い方ではありません。

併合整列法: 整列済の列の併合

- 方法 (a, bを併合したcを作る):
 - cを作る(長さは(aの長さ)+(bの長さ))
 - 2つの列の先頭を比べ、小さい方をコピーする
 - どちらかの最後に至るまで続ける
 - 残った列をコピーする



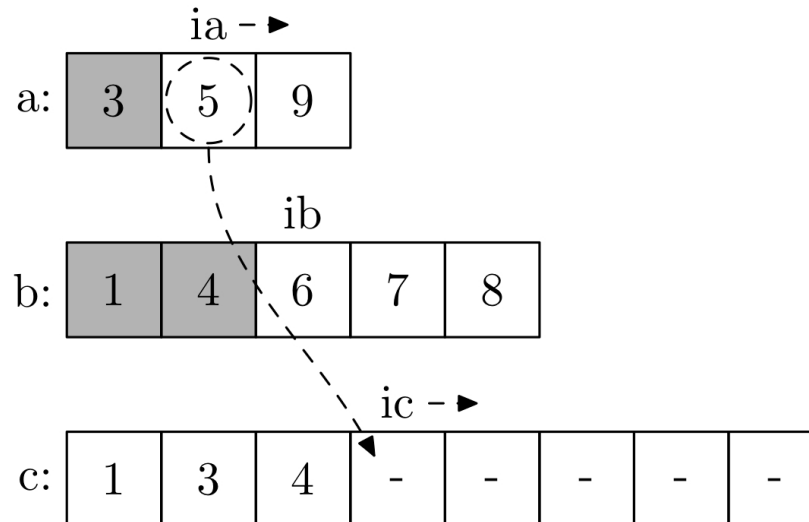
2つの列の併合

```
def merge(a,b)  
  c = Array.new(a.length() + b.length()) —
```

併合した配列

併合処理

```
  c  
end
```



2つの列の併合

```
def merge(a,b)
  c = Array.new(a.length() + b.length())
  ia=0
  ib=0
  ic=0
  while ia < a.length() && ib < b.length()
    if a[ia] < b[ib] then
      c[ic] = a[ia]
      ia = ia + 1
    else
      c[ic] = b[ib]
      ib = ib + 1
    end
    ic = ic + 1
  end
```

併合した配列

a,b,cの「先頭」添字番号

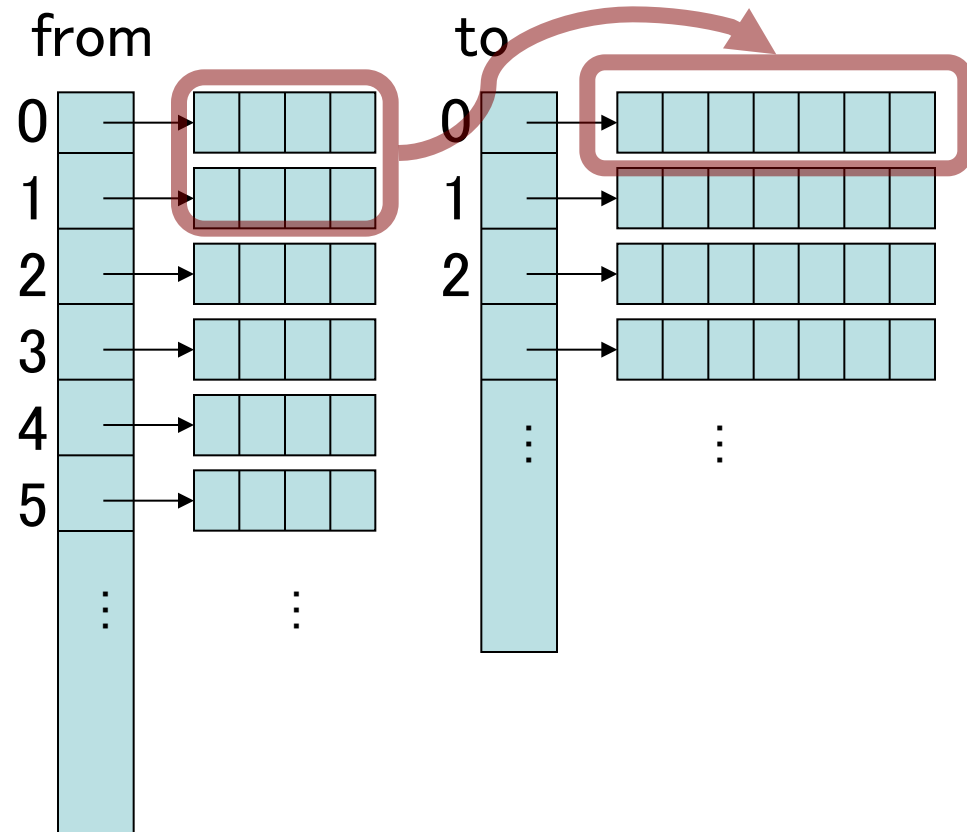
a, b の
先頭から
小さい方を
cに書き写す

a,b のうちまだ残っている方を全て c に移す(省略)

```
  c
end
```

併合整列法

- 前提:
 - 併合される列は配列の配列fromにしまわれている
- 方法:
 - fromが長さ1の配列になるまで繰り返す
 - fromの半分の長さの配列toを作る
 - fromの $(2i)$ 番目と $(2i+1)$ 番目を併合してtoの i 番目にしまう
 - fromをtoにする

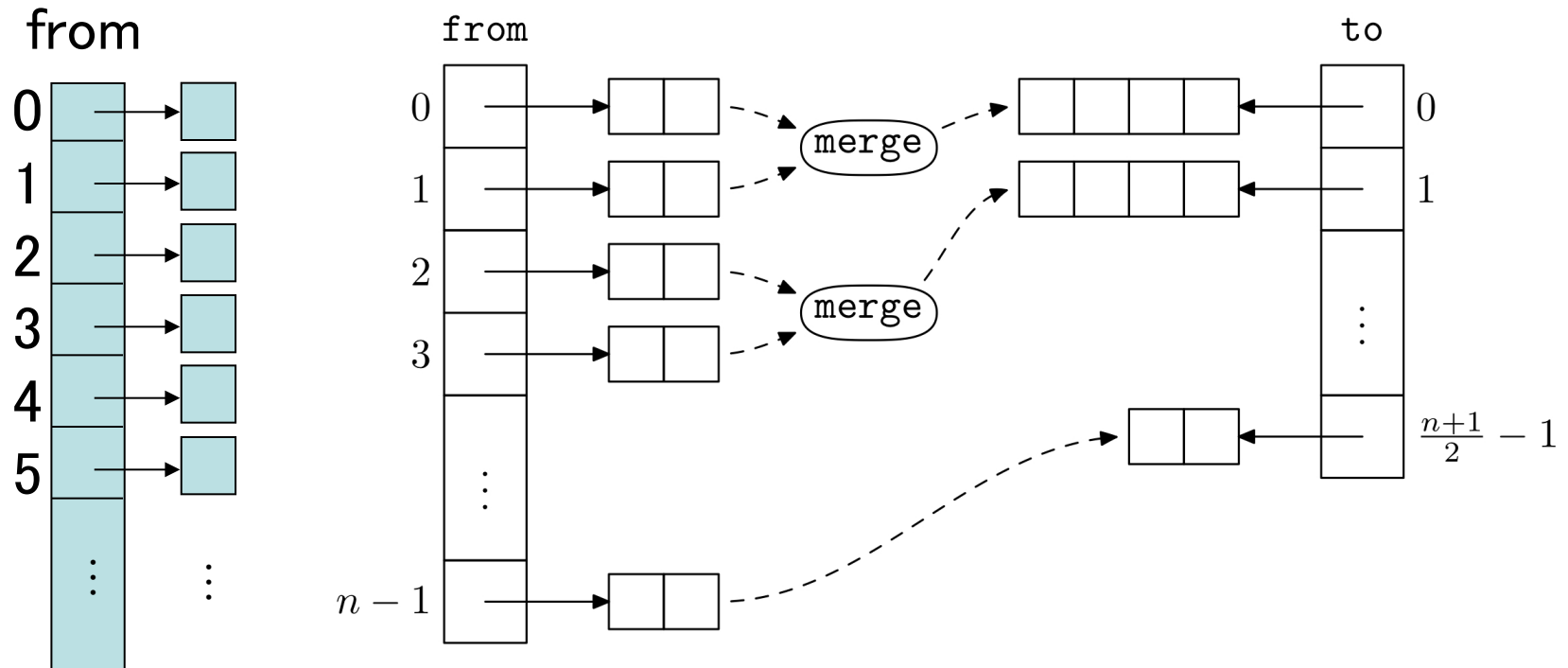


併合整列法: 併合を繰り返す

- 併合は...

隣り合った2つの配列を併合する

→ 最初は要素が1つだけの配列の集まり



併合整列法: 併合を繰り返す

```
def mergesort(a)
  n = a.length()
  from = Array.new(n)
  for i in 0..(n-1)
    from[i] = [ a[i] ]
  end
  while n > 1
    to = Array.new((n+1)/2)
    for i in 0..(n/2-1)
      to[i] = merge(from[i*2], from[i*2+1])
      if !is_even(n)
        to[(n+1)/2-1] = from[n-1]
      end
    end
    from = to
    n = (n+1)/2
  end
  from[0]
end
```

各要素が大きさ1の
配列である配列fromを作る

半分の長さの
配列toを作る

fromの2要素を
併合してtoにコピー

fromが奇数個のときは、
最後の要素は
併合せずにコピーする

toをfromにする

最後はfromが1要素になっており
その中身が整列の結果

fromが
1要素に
なるまで
続ける

while 文は何回まわる？

配列 [3,1,4,1,5,9,2,6,5] に対して, while内の処理は何回実行されるか？（条件判定の回数ではない）

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5

もとの配列は？

$a = [2, 1]$

$b = [4, 3]$

`simplesort(a)`

`mergesort(b)`

この後で、 a と b は？

1. $[1, 2]$ と $[3, 4]$
2. $[1, 2]$ と $[4, 3]$
3. $[2, 1]$ と $[3, 4]$
4. $[2, 1]$ と $[4, 3]$
5. わからない

課題: アルゴリズムによる速度差の実測

- 平方根・整列の複数のアルゴリズムに対応したプログラムを作り、速度の違いを調べる
 - 平方根の場合: x/δ の大きさによって時間がどう変化するかをグラフを描いてみる。1秒間に何回計算できるかで比べよ。
 - 整列の場合: ランダムな列を作り、それを整列させてみよ。列の長さで時間がどう変化するかをグラフを描いてみる。
- グラフから、実行時間を予測する式を推定せよ

```
load("./randoms.rb ")    # randoms(id,size,max)
load"./bench.rb")        # run(function_name, x, v)
load("./simplesort.rb")  # simplesort(a)
load("./mergesort.rb")   # mergesort(a)

def compare_sort(max, step)
  for i in 1..(max/step)
    x=i*step
    a=randoms(i,x,1)
    run("simplesort", x, a)
    a=randoms(i,x,1)
    run("mergesort", x, a)
  end
end
```

進捗状況の確認

1. `simplesort` も `mergesort` も動いたら、投票してください。
 - 配列 `a` の(先頭を0番目としたときの)`i`番目以降の値の中で、最小値が出現する番号を答える `min_index(a,i)` を追加して、単純整列法を完成させなさい。
 - 省略された部分を補って関数 `merge` を完成させなさい。
 - 終わったら `compare_sort(5000, 250)` を実行してください。