2013年度数学IA演習補足

ε-N 論法を使った証明について

理I 28 〜 33組

4月30日 清野和彦
数理科学研究科棟5階524号室 (03-5465-7040)
nkiyono@mail.ecc.u-tokyo.ac.jp
http://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/~nkiyono/index.html

§ 前書き

数列の収束を定義に従って証明しようとするとき一番悩むのは、

> 収束する状況のイメージは持てたが、それを収束の定義の述べ方、つまり「ε-N 論法」で書き表すことができない

という点でしょう。このプリントでは、第2回の解答プリントの方にあまり書かなかった「つかんだイメージをどのように ε-N 論法で表現すればよいのか」という点について説明します。

「ε-N 論法による証明」って何をすればいいの?

という疑問に、演習問題などを題材にして実際に作文する過程を見せることで答えてみようというわけです。

§ 何を目指せばよいのか

具体例を見る前に、まず一般的に

「定義に従って数列の収束を証明する」とは何をすることなのか

を確認しておきましょう。

数列 $(a_n)_n$ が具体的に与えられるか、あるいは第2回のいくつかの問題のように、抽象的ではあるけれど収束することが仮定されている別の数列から具体的に作られているとき、$(a_n)_n$ が a という値に収束していること、つまり a が $(a_n)_n$ の極限であることを証明するとは、もちろん、

> どんな(に小さな)正実数 ε が与えられても、ε に応じて(十分大きな)自然数 N を選べば、N より大きいすべての自然数 n について $|a_n - a| < \varepsilon$ が成り立つ

ということを示すことです。「それが上手くできないから困っているんじゃないか」と思われるでしょう。つまり、「何をしろと要求されているのか分からない」と感じている人がほとんどだと思います。

そこで、上の文を次のように書き換えてみましょう。

正実数 ε を与えられてしまった。この与えられてしまった ε に対して、

N より大きいすべての n について $|a_n - a| < \varepsilon$ が成り立つ

という性質を持つ N を、ε を使った式などの形で作ることができる。

こう書き換えてみると見えてくるのではないでしょうか。あなたのやらなければならないことは

ε を使って N を作る「作り方」を見つけること

だということが。

考えてみれば、「任意の」とか「すべての」という言葉がついてしまっている文字（つまり、ε と n）は誰かに勝手に与えられてしまうという感じのものなのであって、あなたがどうこう手を下してよいものではありませんから、あなたに残されたことは「存在する」という言葉がついている文字（つまり N）が本当に存在することを示すこと、すなわち、要求された性質を持つ N を作る作り方をはっきり書き表すことに尽きます。

論理式で書いた場合、示したいことは

$$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n\ [n > N \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon]$$

となりますが（$\varepsilon > 0$ のような分かり切った条件はうるさいので省いて書きました）、このうち $\forall$ という記号の付いている文字は**あなたにはいじることができない**文字なわけです。だから、残されたことは $\exists$ のついている数 N を、この文が成り立つように**作り出すこと**だけなのです。しかも、この N は

> $\exists N$ より左側にある文字 ε には依存してよいが、$\exists N$ より右側にある文字 n には依存してはいけない

のですから、結局、具体的には

N を ε で表す式などを作ること

があなたのしなければならないことになります。ただし、N は大きい分にはいくら大きくてもかまわないのですから、N をきっちり ε の式で表す必要はありません。（その気持ちを表すために「など」という言葉を付けておきました。）どこまではっきり表せれば「作り方」と言えるのかということについては実例で見てもらうことにします。

§ 実例 1

まず証明する必要がないほど当たり前に感じる例からはじめましょう。

$$a_n = \frac{1}{n}$$

の場合に

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

であることの証明を書いてみます。証明したいことは、

どのような正実数 ε が与えられても、

N より大きいすべての自然数 n について $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ が成り立つ

という性質を持つ N が存在する。

ということ、論理記号を使って書けば、

$$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n\ \left[n > N \Longrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon\right]$$

です。

スタート地点はどこかというと、

正実数 ε が**一つ固定されてしまった**

というところです。「ε はすべての正実数なのだから、ε を一つの値であるかのように扱うのはおかしい」と感じる人も多いかも知れません。しかし、あなたの作らなければならない N は ε に依存してよいわけですから、

ε が一つ固定されるごとに、それに見合った N を作る

ということが目標なわけです。つまり、「$\varepsilon = 0.1$ でも N が作れるし、$\varepsilon = 0.01$ でも N が作れるし、、、」というように、

ε がどんな値であろうとも、ε **を一つ決めれば N を（少なくとも）一つ作れる**

という**「ε に応じた N の返し方」**を作りたいわけですから、ε は固定した一つの値（ただし、その値は正実数という以外には全くどんな値かわからない）だとして N を作れればよいわけです。慣れないうちは、ε と書くとどうしても一つの固定された実数だと思えないということも多いので、ここでは証明に至るまでの道筋では「一つ決められてしまった ε」のことを ε_0 と書いておきます。ただし、慣れれば ε と書いても混乱はありませんし、教科書などではもちろん ε_0 などは使わず ε で書いてありますので、証明を「清書」する段階では ε_0 はやめて ε と書くようにしてみます。

さて、この「一つ固定された ε の値」である ε_0 に対して、あなたのしなければならないことは

$$\forall n\ [n > N \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon_0]$$

を満たす N を見つけることです。もちろん N は ε_0 に依存します。この「N を見つける」というステップは、問題にしている数列 $(a_n)_n$ に依存するわけですから、一般論で片付けるわけにはいかず、個々に対処する必要があります。今の場合、$a_n = \frac{1}{n},\ a = 0$ ですので、

$$|a_n - a| < \varepsilon_0$$

とは

$$\frac{1}{n} < \varepsilon_0$$

です。つまり、

$$n > \frac{1}{\varepsilon_0}$$

であるようなすべての n に対して $|a_n - 0| < \varepsilon_0$ が成り立つわけです。だから、N として $\frac{1}{\varepsilon_0}$ をとればよい、と思いがちですが、「N は自然数」という制限があるので、

$$N \text{ は } \frac{1}{\varepsilon_0} \text{ 以上の自然数のうちの一つ}$$

とすればよいわけです。このような自然数が存在することは、アルキメデスの原理によって保証されています。

これで十分「N の作り方がわかった」と言ってよいのです。こんなものとても「N を ε の式で書き表した」とは言えないので、「ε の式**など**」と書いておいたのです。これが「など」の実例です。

「いや、やっぱりこれじゃキチンと N が作れたとは思えない」という人も多いでしょう。特に、新しいことを学んだばかりの頃というのは、キッチリしていない（ように見える）部分に不安を感じるものですので、そのように感じてしまうのも無理からぬことです。そういう人は、例えば、

$$N \text{ として } \frac{1}{\varepsilon_0} \text{ 以下の最大の整数に } 1 \text{ を足したもの、}$$

数式だけで書きたいなら、いわゆるガウス記号を用いて、

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon_0}\right] + 1$$

としておけば不安が取り除かれると思います。（任意の実数に対してそれ以下の最大の整数が存在する、ということはアルキメデスの原理によって示されることであることに注意してください。）

以上が、「与えられた ε を使って、欲しい N を作り出す過程」の実例です。最後に、必要なところだけまとめて「証明らしい証明」にしておきましょう。

証明. ε を任意の正実数とする。自然数 N を

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

によって決める。（正実数 a に対して、$[a]$ は a 以下の最大の整数のことである。）

$$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

であるから、N より大きい任意の n に対して

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \frac{1}{[1/\varepsilon] + 1} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$$

が成り立つ。

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$$

であるから、この不等式 $\frac{1}{n} < \varepsilon$ は

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

であることを示している。 □

このまとめられた証明を読んで、「全然、数列の収束の定義の文になっていないじゃないか」と思われるかも知れません。しかし、何度も言ったように、あなたがしなければならないことは

$$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n\ [n > N \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon]$$

を成り立たせる N の**作り方を書くことだけ**です。だから、証明は

> ε を使ってこのように N を作りなさい。そうすれば、ほれご覧の通り「$n > N \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$」が成り立ちます。

というように書けばよいわけです。くだらない例ですが、例えば

任意の実数 a に対して $x + 3 = a$ となる x が存在することを示せ。

という問題、論理式で書けば

$$\forall a \; \exists x \; [x + 3 = a]$$

を示せと言われたら、誰だって

$x = a - 3$ とすればよい。

としか答えませんよね。それと全く同じことです。

§ 実例 2

今のを少しだけ複雑にしたような例を取り上げましょう。r を $|r| < 1$ を満たす定数として、

$$a_n = r^n$$

とします。このとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

であることの証明を書いてみましょう。
スタートはやはり

正実数 ε が一つ固定されてしまった

というところです。固定された ε の値を ε_0 と書くことにします。この ε_0 について

N より大きいすべての n について $|a_n - 0| < \varepsilon_0$ が成り立つ

という性質を持つ N を作り出すのが目標です。
先ほどもそうだったように「N の作り方」は数列 $(a_n)_n$ に依存するので、個別に対応しなければなりません。今の数列の場合、

$$|a_n - 0| = |r^n - 0| = |r^n| = |r|^n$$

ですので、$|r|$ が 1 未満のとき、n がどのくらい大きければ $|r|^n < \varepsilon_0$ となるかを調べることになります。
「n 乗」というのがわかりにくさの原因だと思うので、それを避けるために二項定理を使うことにしてみましょう。($r = 0$ のときは n によらずに $r^n = 0 < \varepsilon_0$ が成り立ちますので、N は何でもよいということになります。そこで、以下では $|r| \neq 0$ として考えます。)$0 < |r| < 1$ ですから、

$$\frac{1}{|r|} = 1 + s \qquad (s > 0)$$

という定数 s が決まります。すると、

$$|r|^n = \frac{1}{(1+s)^n} = \frac{1}{1 + ns + \frac{n(n-1)}{2}s^2 + \cdots + ns^{n-1} + s^n}$$

となります。今 $s > 0$ ですので、

$$(1+s)^n = 1 + ns + \frac{n(n-1)}{2}s^2 + \cdots + ns^{n-1} + n > ns$$

が成り立ちます。よって、

$$|r|^n < \frac{1}{ns}$$

となります。ということは、n が

$$\frac{1}{ns} < \varepsilon_0$$

を満たすほど大きければ、目標の不等式

$$|r|^n < \varepsilon_0$$

が成り立つことになります。よって、N を

$$N > \frac{1}{s\varepsilon_0}$$

を満たす自然数のうちの一つと決めればよいことになります[1]。（もちろん実例 1 のようにガウス記号などを使って N をキッチリ式で書くこともできますが、ここでは「とにかく N は存在しさえすればよい」という大雑把さに慣れてもらうためにこのままにしておきます。）

「N は『ε だけの式など』になっていないじゃないか」と思う人もいるかも知れません。そういう人がいたとすると、私が今まで「N を ε で決める」と単純化して強調しすぎたせいかもしれません。もちろん ε と N との関係は問題にしている数列 $(a_n)_n$ に依存するわけですから、$(a_n)_n$ の情報が式に入ることは問題ありません、と言うか当然のことです。もう一つ、「この N の決め方には問題には直接使われていない文字 s が使われたままになっているが、それはまずいのではないか」と思う人もいるかも知れません。そういう人がいたとすると、これまた私が「N の作り方を書き表す」ということを強調しすぎたせいでしょう。申し訳ありません。本当に重要なのは「N の作り方が**存在すること**」だけなので、証明中で N を作ってみせるときに、自分で決めた文字などが入ったままになっていても全く問題ありません。

以上を踏まえて証明を完成させてみましょう。

証明. ε を任意の正実数とする。

$r = 0$ のときはすべての n に対して $a_n = 0$ なので、任意の n で $|a_n - 0| = 0 < \varepsilon$ が成り立つ。よってこの場合は $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である。

$r \neq 0$ のとき、正実数 s を

$$\frac{1}{|r|} = 1 + s$$

によって定義し、自然数 N を

$$N > \frac{1}{s\varepsilon}$$

を満たすもののうちの一つとする。s が正であることと二項定理によって、

$$(1+s)^n = 1 + ns + \frac{n(n-1)}{2}s^2 + \cdots + ns^{n-1} + s^n > ns$$

が成り立つので、n が N より大きいとき、

$$|a_n - 0| = |r|^n = \frac{1}{(1+s)^n} < \frac{1}{ns} < \frac{1}{\frac{1}{s\varepsilon}s} = \varepsilon$$

となる。これは $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示している。 $\square$

[1] ここでも N の存在を保証してくれているのはアルキメデスの原理です。この先でもアルキメデスの原理を何度も使いますが、面倒になったので、いちいち指摘するのはやめます。あしからずご了承ください。

§ 実例 3

もう一つだけ似たような例を見ておきましょう。a を定数として、

$$a_n = \frac{a^n}{n!}$$

とするとき、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

であることを証明してみます。（ただし、$a = 0$ のときは実例 2 で証明したので $a \neq 0$ とします。）

スタートはもちろん

正実数 ε が一つ固定されてしまった

というところです。この値を ε_0 とします。この ε_0 に対して

N より大きいすべての n について $|a_n - 0| = |a|^n < \varepsilon_0$ が成り立つ

という性質を持つ自然数 N を作り出せばよいわけです。

上記 2 例でもそうだったように ε_0 から N を作るところは数列 $(a_n)_n$ に依存して決まる部分なので、$(a_n)_n$ をよく調べて N の作り方を見出すしかありません。今の場合

$$|a_n - 0| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!}$$

なので、n がどのくらい大きければ

$$\frac{|a|^n}{n!} < \varepsilon_0$$

となるかを ε_0 と $|a|$ から得られる情報で書き表せばよいということになります。

$$\frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|}{1}\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{n-1}\frac{|a|}{n}$$

であることを考えると、$|a|$ より大きい自然数 M を一つとって固定すれば、n が M より大きいとき、

$$\frac{|a|^n}{n!} < \frac{|a|^M}{M!}\left(\frac{|a|}{M}\right)^{n-M}$$

となります。だから、我々の目標を達成するには、

$$\frac{|a|^M}{M!}\left(\frac{|a|}{M}\right)^{n-M} < \varepsilon_0$$

が成り立ってくれれば十分です。今、$|a|$ や M は n によらない定数ですから、n によらない $\frac{|a|^M}{M!}$ で両辺を割り、さらに $n - M$ を n にするために両辺に n によらない $\left(\frac{|a|}{M}\right)^M$ を掛けましょう。すると、

$$\left(\frac{|a|}{M}\right)^n < \frac{M!}{M^M}\varepsilon_0 \tag{1}$$

が成り立てばよい、というように変形されて見やすくなります。（もちろん、ここまで変形しなくても目的の N を見つけられるという人は自分なりの方法で N を作ればよいわけで、その方がよりよいと思います。ここでは、手間がかかってもできるだけ状況の見やすい式になるまで変形してみました。）ここで、実例 2 を思い出すと、$\frac{|a|}{M} < 1$ であることから、我々は n を十分大きくすれ

ば $\left(\frac{|a|}{M}\right)^n$ を好きなだけ小さくできることを既に証明してあります。（今、M は定数であることに注意してください。）特に「$n > N$ ならば不等式 (1) が成り立つ」という N が存在することは証明済みなわけです。**だから、ここではこの N を ε_0 の式であらわに書いてあげる必要はありません**。（もちろん書いても結構です。）もう少し正確に言うと、

> $|r| < 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$ であるということが、あなたの書く証明を読む（あなたも含めた）すべての人にとって証明済みのことであるなら、N より大きいすべての n が不等式 (1) を満たすような自然数 N を具体的に書いてあげる必要はない

ということです。だから、例えば定期試験においてこの問題が出題された場合、$\lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$ を講義で証明してあるなら、このような N が存在することは共通認識としてわかっているものとし、具体的に構成してあげる必要はないということになります。（もちろん、N を具体的に作ることを要求している問題なら別です。）

以上をまとめると、次のような証明になるでしょう。

証明. $|a|$ より大きい自然数 M を一つ固定する。すると、$\frac{|a|}{M} < 1$ となるので、実例 2 で証明したように

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|a|}{M}\right)^n = 0$$

が成り立つ。ということは、任意に与えられた正実数 ε に対して、自然数 N で、N より大きい任意の自然数 n について

$$\left(\frac{|a|}{M}\right)^n < \frac{M!}{M^M}\varepsilon$$

の成り立つものが存在する。すると、このような n のうち M より大きいものについては、

$$|a_n - 0| = \frac{|a|^n}{n!} < \frac{|a|^M}{M!}\left(\frac{|a|}{M}\right)^{n-M} = \frac{M^M}{M!}\left(\frac{|a|}{M}\right)^n < \frac{M^M}{M!}\frac{M!}{M^M}\varepsilon = \varepsilon$$

が成り立つ。これは $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示している。 □

この証明を読んで、あるいはこの証明にたどり着くためにした上記の考察において、次のような違和感を持った人がいるかも知れません。

> $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|a|}{M}\right)^n = 0$ という実例 2 で証明した事実を、
>
> $$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n\ \left[n > N \Longrightarrow \left(\frac{|a|}{M}\right)^n < \varepsilon\right]$$
>
> ではなく
>
> $$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n\ \left[n > N \Longrightarrow \left(\frac{|a|}{M}\right)^n < \frac{M!}{M^M}\varepsilon\right]$$
>
> という形で使っているがよいのか?

あるいは、

> 実例 2 で証明した
>
> $$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n\ \left[n > N \Longrightarrow \left(\frac{|a|}{M}\right)^n < \varepsilon\right]$$
>
> に出てくる ε だって任意の実数で、誰かに与えられてしまうものなのに、自分で勝手に $\frac{M!}{M^M}\varepsilon$ というように細工をして使っているがよいのか?

というような疑問です。これは全く問題ありません。このことを説明しましょう。

我々が証明したいのは

$$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n\ \left[n > N \Longrightarrow \frac{|a|^n}{n!} < \varepsilon\right] \tag{2}$$

です。つまり、自分でない人が勝手に ε の値を決めてしまっても、それに応じて N をうまく作ることによりこの文の $\forall n$ から右側が成り立つようにできる、ということを示すことです。一方、

$$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n\ \left[n > N \Longrightarrow \left(\frac{|a|}{M}\right)^n < \varepsilon\right] \tag{3}$$

という文は実例 2 で既に証明済みですので、**自分で好きなように利用してよい**のです。それは何を意味するかというと、**自分の都合で ε の値を好きなように決めて、それに応じて決まる N を取り出して利用してよい**ということです。だから、実例 3 の証明の流れがどうなっているかを考えると、

1. 文 (2) に出てくる ε の値を ε_0 に誰かに勝手に決められてしまった。
2. その ε_0 に $\frac{M!}{M^M}$ を掛けたものを文 (3) の中の ε の値に決めてみた。
3. 文 (3) は証明済みの事実なのだから、**2.** で決めた ε の値に応じた N の値が決まる。
4. その N の値を文 (2) における N として採用するとうまいこと「$n > N \Longrightarrow \frac{|a|^n}{n!} < \varepsilon_0$」が成り立った。

というようになっているわけです。

このような議論の進め方にはしょっちゅう出会います。実際、このあと説明するように第 2 回演習の問題 1 や問題 4 も全く同様ですし、$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$ のような数列の極限の間の関係を証明する際にも出てきます。

少し話がそれますが、

$$\frac{|a|^n}{n!} < \frac{|a|^M}{M!}\left(\frac{|a|}{M}\right)^{n-M}$$

がわかった時点で右辺に実例 2 の結果を使えばはさみうちの原理から ε-N 論法を使わずに証明できるのではないか? と思った人も多いと思います。もちろん、それで構いません。ただし、**はさみうちの原理が既に証明済みであれば**の話です。特に、**あなた自身が証明したことがある**ということが一番重要です。たとえ、はさみうちの原理が正しいということを聞き知っていたとしても、**自分で証明したことがなければ使わない**という態度が A コースでは非常に重要です。答案を書いているとき「どこまで証明を書けばよいのかわからない」と感じることがよくあると思いますが、とりあえずは、**書こうか書くまいか迷った証明はすべて書く**というのが（手間はかかりますが）一番手っ取り早い上、もっとも勉強になる答案の書き方です。しばらく続けると力の抜きどころが自然にわかってきますので、心配は要りません。是非そのように実践してみて欲しいと思います。

§ 実例 4 : 第 2 回問題 1

実例 1,2,3 で考えた「証明の書き方」を第 2 回の問題 1 に適用してみましょう。問題 1 で証明すべきことのイメージはつかめているものとします。（それについては第 2 回演習の解答プリントを参照して下さい。）

証明したいのは

$$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n\ [n > N \Longrightarrow |c_n - c| < \varepsilon] \tag{4}$$

が成り立つことです。つまり、どんな正実数 ε が与えられてしまっても、この文の右の方が成り立つ N を作ることができるということを示すことです。また、仮定、つまり「自由に使ってよい事実」は

$$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n\ [n > N \Longrightarrow |a_n - c| < \varepsilon] \tag{5}$$

と

$$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n\ [n > N \Longrightarrow |b_n - c| < \varepsilon] \tag{6}$$

の二つの文が成り立つことです。くれぐれも注意して欲しいのですが、**文 (5) と文 (6) の ε はあなたが好きなように勝手に決めて利用してよい**のであって誰かが勝手に決めてしまってあなたには手の下しようがないというものではないということです。**誰かに与えられてしまってあなたが勝手にいじることのできない ε は証明しようとしている文 (4) の中の ε だけです**。

というわけで、証明を考える上でのスタートは例によって

証明したい文 (4) の中の ε の値を勝手に一つ決められてしまった

というところです。この値を ε_0 としましょう。この一つ決められてしまった ε の値 ε_0（に必要なら上手く細工をしたもの）を「勝手に使ってよい二つの文 (5),(6)」の ε に入れてそれぞれの N の値を取り出し、それを利用して本当に欲しい N を作り出そうというわけです。

我々が欲しい N は

N より大きいすべての n について $|c_n - c| < \varepsilon_0$ が成り立つ

というような N です。そこで、$|c_n - c| < \varepsilon$ という不等式をよく見て、文 (5) と (6) を適用できそうな不等式が出てくるように工夫しましょう。

n が奇数のときは $c_n = a_{\frac{n+1}{2}}$ ですから、この不等式は

$$|a_{\frac{n+1}{2}} - c| < \varepsilon_0$$

ということを意味します。これは、「使ってよい文 (5)」から、ある範囲で成り立つことが分かっています。どのように分かっているかというと、文 (5) の ε の値を ε_0 に決めたときに得られる文 (5) の中の N の値を N_a とすると、

$$\frac{n+1}{2} > N_a$$

の範囲で成り立ちます。

一方、n が偶数のときは $c_n = b_{\frac{n}{2}}$ ですから、この不等式は

$$|b_{\frac{n}{2}} - c| < \varepsilon_0$$

となります。これは、「使ってよい文 (6)」から、ある範囲で成り立つことが分かっています。どのように分かっているかというと、文 (6) の ε の値を ε_0 に決めたときに得られる文 (6) の中の N の値を N_b とすると、

$$\frac{n}{2} > N_b$$

の範囲で成り立ちます。

以上より、$|c_n - c| < \varepsilon_0$ という不等式は、

$[n > 2N_a - 1$ かつ n は奇数$]$ または $[n > 2N_b$ かつ n は偶数$]$

という範囲の n について成り立つことが分かりました。

さて、我々の欲しい N は、$n > N$ でさえあれば n **が偶数か奇数かということによらずに** $|c_n - c| < \varepsilon_0$ が成り立つような N です。今、$n > 2N_a - 1$ と $n > 2N_b$ の両方が一遍に成り立つ n なら n が奇数でも偶数でも $|c_n - c| < \varepsilon_0$ が成り立つわけですから、$2N_a - 1$ と $2N_b$ の大きい方を N にすればよいわけです。最大値を表す記号を使えば

$$N = \max\{2N_a - 1, 2N_b\}$$

というようにして N を作ればよいということが分かったわけです。なお、N の値は大きい分にはいくら大きくてもよいのですから、$2N_a - 1$ と $2N_b$ のうちの大きい方の代わりに $2N_a$ と $2N_b$ のうちの大きい方を採用することもできます。そのようにして作った解答が第 2 回解答のプリントに書いた解答です。ここでの説明を参考にしながら自分で証明を作ってみて、それを解答プリントの解答と比較してみて下さい。

§ 実例 5：数列の和と極限の和

第 2 回問題 4 の説明に進む前に、

> 数列 $(a_n)_n$ が a に、数列 $(b_n)_n$ が b に収束しているなら、$c_n = a_n + b_n$ によって定義される数列 $(c_n)_n$ は $a + b$ に収束する。

の証明の作り方を見ておきましょう。

証明したい文は

$$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n\ [n > N \Longrightarrow |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon]$$

です。また、「使ってよい文」は

$$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n\ [n > N \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon]$$

と

$$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n\ [n > N \Longrightarrow |b_n - b| < \varepsilon]$$

です。

スタートはいつもの通り、

証明したい文の中の正実数 ε が一つ勝手に固定されてしまった

というところです。その値を ε_0 とします。最終目標は、この ε_0 に対して

> $n > N$ を満たすすべての n について $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon_0$ が成り立つという性質を持つ N を作ること

です。

まず、満たすようにしたい不等式 $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon_0$ を「使ってよい文」の中の不等式と関連がつくような形に変形しましょう。そのために、いわゆる**三角不等式** $|a + b| \leq |a| + |b|$ を使って

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

と変形してみます。すると、満たして欲しい不等式を満たすには

$$|a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon_0 \tag{7}$$

が成り立てば**十分**であることが分かります。「使ってよい二つの文」は $|a_n - a|$ に対する不等式と $|b_n - b|$ に対する不等式なので、不等式 (7) を二つの不等式に分解しましょう。分解するといっても、不等式 (7) と同値になるように分解する必要はありません。**不等式 (7) が成り立つのに十分な条件になっている**ように分解しさえすればよいのです。だから、「$|a_n - a|$ も十分小さく $|b_n - b|$ も十分小さいので、足しても ε_0 より小さい」となるように、「十分小さい」という小ささを ε_0 を使って具体的に決めてあげればよいわけです。足して ε_0 より小さくなりさえすればよいのですが、やはり一番素直なのは

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon_0}{2} \quad \text{かつ} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

でしょう。

さて、「使ってよい二つの文」から、この二つの不等式がそれぞれある範囲の n について成り立つことを我々は知っています。$|a_n - a| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ を満たす n の範囲は、「使ってよい文」の上の方のものの ε のところに $\frac{\varepsilon_0}{2}$ を入れたときの N の値を N_a としたとき、$n > N_a$ です。同様に、$|b_n - b| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ を満たす n の範囲は、使ってよい文の下の方のものの ε のところに $\frac{\varepsilon_0}{2}$ を入れたときの N の値を N_b としたとき、$n > N_b$ です。よって、n が N_a と N_b の両方より大きければ $|a_n - a| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ と $|b_n - b| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ の両方が同時に成り立ち、その結果 $|a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon_0$ が成り立つことになります。ということは、欲しかった不等式 $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon_0$ も成り立つわけです。

以上より、N を N_a と N_b の大きい方、すなわち $\max\{N_a, N_b\}$ とすれば、N より大きいすべての n について $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon_0$ の成り立つことが分かりました。

これをまとめたのが第 2 回解答プリントに書いた証明です。上記を参考にしながら自分で証明を完成させてみて、解答プリントの証明と比較してみて下さい。

なお、このように書いてくると $|a_n - a| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ と $|b_n - b| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ の二つの不等式で ε_0 ではなく $\frac{\varepsilon_0}{2}$ を使っていることは自然なことに見えると思いますが、実際に証明しようと模索している段階では、こんなに上手く「使ってよい文」の使い方がはじめから分かるはずのものではありません。

> $|a_n - a| < \varepsilon_0$ と $|b_n - b| < \varepsilon_0$ なら成り立つんだけど、これをどうやって使えばいいかな … あっ、そうだ足してみよう。すると、
>
> $$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon_0$$
>
> が得られるじゃん。あ、「$< \varepsilon_0$」じゃなくて「$< 2\varepsilon_0$」になっちゃった。ε_0 は任意だから別にこのままでもいいんだけど、ま、ちょっとかっこわるいから、$|a_n - a|$ と $|b_n - b|$ に使った ε_0 を $\frac{\varepsilon_0}{2}$ に取り替えておこう。そうすれば結論は「$< 2\varepsilon_0$」じゃなくて「$< \varepsilon_0$」に直るから。

なんていうように考えているものです。

§ 実例 6 : 第 2 回問題 4

最後に第 2 回の問題 4 を考えてみましょう。

証明したい文は

$$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n \left[n > N \Longrightarrow \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| < \varepsilon \right]$$

です。そして、「自由に使ってよい文」は

$$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n\ [n > N \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon]$$

です。

例によって

証明したい文の中の正実数 ε が一つ勝手に固定されてしまった。

というところからスタートします。その値を ε_0 としましょう。ゴールは、この ε_0 に対して、

N より大きいすべての n について

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\varepsilon_0$$

の成り立つような N を作る（存在することを証明する）こと

です。

もちろん、これから説明するのは「ε-N 論法での作文の仕方」であって、どうやったら問題が解けるのかということではありません。だから、

はじめの方の a_n は a とずいぶん違うかも知れないけど、遠くの方の a_n はほとんど a と同じなのだから、充分たくさんの a_n を平均してしまえば、やっぱりほとんど a と同じ

というイメージは既につかめているものとしてこのイメージをどうやって ε-N 論法の文にするかを説明します。

まず、例によって、結論の不等式を変形して「使ってよい文」の中の不等式が使えそうな形にしてみましょう。「使ってよい文」の中に出てくるのは $|a_k-a|$ というものなので（n は $a_1+a_2+\cdots+a_n$ の方で使っているので、混乱を避けるために k に取り替えました)、

$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a&=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n-na}{n}\\&=\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\end{aligned}$$

と見直してみます。これに三角不等式を $n-1$ 回使うと、

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|\le\frac{|a_1-a|}{n}+\frac{|a_2-a|}{n}+\cdots+\frac{|a_n-a|}{n}$$

という不等式が得られます。よって、これの左辺が ε_0 より小さければ十分だということになります。

もしも $|a_1-a|$ から $|a_n-a|$ までがすべて ε_0 より小さければ、全体として ε_0 より小さくなるので万々歳なのですが、$|a_k-a|<\varepsilon_0$ が保証されるのは k が「使ってよい文」で与えられる範囲に入っているときだけであって、k が小さい方の $|a_k-a|$ はどんな値か全く分かりません。かといって、大きい k に対する $|a_k-a|$ を ε_0 よりどれほど小さくしておけばよいのか、例えば $|a_k-a|<\frac{\varepsilon_0}{2}$ でよいのか、あるいは $|a_k-a|<{\varepsilon_0}^2$ などとしなければ駄目なのかすぐには分かりません。そこで、とりあえず $|a_k-a|<\varepsilon_0$ の成り立つところだけ $|a_k-a|$ を ε_0 に置き換えるとどうなるか、突き進んでみましょう。

どうするのかというと、「使ってよい文」の ε を今決められてしまっている ε_0 にしたときに、

「使ってよい文」から得られる N の値を N_a とし、

$$\begin{aligned}
&\frac{|a_1-a|}{n}+\cdots+\frac{|a_{N_a}-a|}{n}+\frac{|a_{N_a+1}-a|}{n}+\cdots+\frac{|a_n-a|}{n}\\
&<\frac{|a_1-a|}{n}+\cdots+\frac{|a_{N_a}-a|}{n}+\frac{\varepsilon_0}{n}+\cdots+\frac{\varepsilon_0}{n}\\
&=\frac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_a}-a|}{n}+\frac{n-N_a}{n}\varepsilon_0
\end{aligned}$$

という不等式を考えてみるわけです。(n が大きいところだけが問題なので、$n>N_a$ で考えています。)

$$\frac{n-N_a}{n}<\frac{n}{n}=1$$

ですので、

$$\frac{n-N_a}{n}\varepsilon_0<\varepsilon_0$$

は n によらずに成り立ちます。一方、N_a は ε_0 で決まる数であり n とは無関係なので、

$$|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_a}-a|$$

は n によらない定数です。よって、実例 1 と同様に

$$\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_a}-a|}{n}<\varepsilon_0$$

が N より大きいすべての n に対して成り立つような N が存在します。例えば、$|a_1-a|,\ldots,|a_{N_a}-a|$ のうち最大のものの値を M とすると、N としては

$$N>\frac{MN_a}{\varepsilon_0}$$

を満たす自然数を一つ決めればよいわけです。

以上より、n が N と N_a の両方より大きければ、

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\varepsilon_0+\varepsilon_0=2\varepsilon_0$$

が成り立つことになります。

これで証明終わりと言ってもよいのですが、結論が「$<\varepsilon_0$」ではなく「$<2\varepsilon_0$」になってしまっているところがちょっとかっこわるいので、これを直しておきましょう。$2\varepsilon_0$ になってしまった理由は「使ってもよい文」の ε に与えられてしまっていた ε_0 をそのまま入れたからです。そこで、「使ってもよい文」の ε として、与えられた ε_0 の半分の $\frac{\varepsilon_0}{2}$ を使いましょう。つまり、まず「使ってよい文」を利用して

$$k>N'_a\Longrightarrow|a_k-a|<\frac{\varepsilon_0}{2}$$

の成り立つ N'_a を取り出します。そして、

$$|a_1-a|,\ldots,|a_{N'_a}-a|$$

の中の最大値を M' とし、

$$N'>\frac{M'N'_a}{\varepsilon_0/2}$$

を満たす自然数 N' を一つ取ります。そうすると、n が N' と N'_a の両方より大きければ

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\frac{\varepsilon_0}{2}+\frac{\varepsilon_0}{2}=\varepsilon_0$$

となるわけです。

これをまとめると（記号の使い方が少し違いますが）第 2 回解答プリントに書いた問題 4 の解答になります。上記を参考にしながら自分で証明を完成させてみて、解答プリントの解答と比較してみて下さい。