

数学 II 演習 (第 12 回) の略解

目次

1	問 1 の解答	1
2	Jordan 標準形とは	7
3	Jordan 標準形に「当たり」をつけるには	11
4	Jordan 標準形を求めるには	18
5	一般固有ベクトルとは	22
6	問 2 の解答	26
7	ベキ零行列の標準形について (3 行 3 列の場合)	27
8	ベキ零行列の標準形について (一般のサイズの場合)*	36
9	ベキ零行列の Jordan 標準形を求めるには	57

1 問 1 の解答

(1) $\varphi_A(x) = \det(xI - A)$ を計算してみると,

$$\begin{aligned}\varphi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-3 & 3 & 1 \\ -3 & x+4 & 2 \\ 4 & -7 & x-4 \end{vmatrix} \\ &= (x-3) \cdot \begin{vmatrix} x+4 & 2 \\ -7 & x-4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -7 & x-4 \end{vmatrix} \\ &\quad + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ x+4 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{(一列目で展開)} \\ &= (x-3)(x^2-2) + 3(3x-5) + 4(2-x) \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ &= (x-1)^3\end{aligned}$$

となることが分かります.

(2) (1) より, 行列 A の特性多項式は,

$$\varphi_A(x) = (x - 1)^3$$

となることが分かります. そこで, $(A - I), (A - I)^2, (A - I)^3$ という行列を順番に計算してみると,

$$\begin{aligned}(A - I) &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & -2 \\ -4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \\(A - I)^2 &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & -2 \\ -4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & -2 \\ -4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\(A - I)^3 &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & -2 \\ -4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となることが分かります. よって,

$$\begin{aligned}\varphi_A(A) &= (A - I)^3 \\ &= O\end{aligned}$$

となることが分かります.

(3) (2) の結果より,

$$\begin{aligned}\varphi_A(x) \in I_A &= \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(A) = O\} \\ &= \{\psi_A(x)g(x) \in \mathbb{C}[x] \mid g(x) \in \mathbb{C}[x]\} \\ &= \psi_A(x) \cdot \mathbb{C}[x]\end{aligned}$$

となることが分かりますから, 最小多項式 $\psi_A(x)$ は特性多項式 $\varphi_A(x)$ を割り切ることが分かります.¹ 今の場合,

$$\varphi_A(x) = (x - 1)^3$$

¹第 11 回の問 2 のところで注意したように, Cayley-Hamilton の定理から, 勝手な正方行列 A に対して, $\varphi_A(A) = O$ となることが分かります. したがって, 常に, 最小多項式は特性多項式を割り切ることが分かります.

となりますから、この時点で、行列 A の最小多項式 $\psi_A(x)$ は、

$$(x-1), (x-1)^2, (x-1)^3 \in \mathbb{C}[x]$$

のうちのいずれかであることが分かります。一方、(2) の計算結果から、

$$\begin{aligned}(A-I) &\neq O, \\ (A-I)^2 &\neq O\end{aligned}$$

となることが分かりますから、

$$(x-1), (x-1)^2 \notin I_A$$

となることが分かります。したがって、行列 A の最小多項式 $\psi_A(x)$ は、

$$\psi_A(x) = (x-1)^3$$

となることが分かります。

(4) (3) より、行列 A の最小多項式 $\psi_A(x)$ は、

$$\psi_A(x) = (x-1)^3$$

となることが分かりますが、これを問題文の中で挙げたそれぞれの Jordan 標準形 J_i , ($i = 1, 2, \dots, 6$) に対する最小多項式 $\psi_{J_i}(x)$ と見比べてみると、

$$\lambda = 1$$

として、

$$\psi_A(x) = \psi_{J_6}(x)$$

となることが分かります。したがって、

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

となることが分かります。²

(5) 行列 P の列ベクトルを、 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \in \mathbb{C}^3$ として、

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix}$$

と表わすことにします。このとき、 P が正則行列であるという条件のもとで、

$$P^{-1}AP = J_A$$

²3 行 3 列の行列の場合には、それぞれの Jordan 標準形に対する最小多項式 $\psi_{J_1}(x), \psi_{J_2}(x), \dots, \psi_{J_6}(x)$ は、すべて互いに異なる形をしているので、上の議論だけで、 J_A が (1) 式のような形であることを結論することができるわけです。

という式を, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \in \mathbb{C}^3$ という列ベクトルに対する条件として書き直してみると,

$$\begin{aligned}
 P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\iff AP = P \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} A\mathbf{p}_1 & A\mathbf{p}_2 & A\mathbf{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} A\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1 \\ A\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \\ A\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} (A - I)\mathbf{p}_1 = \mathbf{0} \\ (A - I)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \\ (A - I)\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2 \end{cases} \tag{2}
 \end{aligned}$$

となることが分かります. したがって, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \in \mathbb{C}^3$ を求めるためには, (2) 式で与えられる連立一次方程式を順番に解けばよいということになります.

そこで,

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & -2 \\ -4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

となることに注意して, $a, b, c \in \mathbb{C}$ として,

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = a \\ 3x - 5y - 2z = b \\ -4x + 7y + 3z = c \end{cases} \tag{3}$$

という連立一次方程式を考えて, (3) 式の連立一次方程式が解を持つための a, b, c の満たすべき条件と, その条件が満たされるときの方程式の解をすべて求めてみることにします. いま, (3) 式の連立一次方程式に対して, 行に関する基本変形を施してみると, 例えば,

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & a \\ 3 & -5 & -2 & b \\ -4 & 7 & 3 & c \end{array} \right) &\xrightarrow{1 \text{ 行目} + 2 \text{ 行目} \times (-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & a - b \\ 3 & -5 & -2 & b \\ -4 & 7 & 3 & c \end{array} \right) \xrightarrow{1 \text{ 行目} \times (-1)} \\
 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b - a \\ 3 & -5 & -2 & b \\ -4 & 7 & 3 & c \end{array} \right) &\xrightarrow[3 \text{ 行目} + 1 \text{ 行目} \times 4]{2 \text{ 行目} + 1 \text{ 行目} \times (-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b - a \\ 0 & 1 & 1 & 3a - 2b \\ 0 & -1 & -1 & 4b - 4a + c \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow[3 \text{ 行目}+2 \text{ 行目}]{1 \text{ 行目}+2 \text{ 行目} \times 2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5a-3b \\ 0 & 1 & 1 & 3a-2b \\ 0 & 0 & 0 & 2b-a+c \end{array} \right)$$

というように変形できることが分かります。したがって、(3) 式の連立一次方程式が解を持つためには、

$$a - 2b - c = 0 \quad (4)$$

でなければならないことが分かります。また、このとき、(3) 式の連立一次方程式は、

$$\begin{cases} x + z = 5a - 3b \\ y + z = 3a - 2b \end{cases} \quad (5)$$

というように書き直せることが分かりますから、その解は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5a - 3b \\ 3a - 2b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C} \quad (6)$$

となることが分かります。³

そこで、以上の結果をもとにして、(2) 式に現われる連立一次方程式を順番に解いてみることにします。まず、

$$(A - I)\mathbf{p}_1 = 0 \quad (7)$$

という連立一次方程式を考えてみると、これは、(3) 式において、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

としたものであることが分かります。すると、これらの値は、(4) 式の条件を満たすことが分かりますから、(7) 式の連立一次方程式は解を持つことが分かります。そこで、例えば、(6) 式において、 $t = 1$ としてみると、(7) 式の連立一次方程式の解として、

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

が取れることが分かります。⁴

次に、(8) 式で与えられるベクトル $\mathbf{p}_1 \in \mathbb{C}^3$ に対して、

$$(A - I)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \quad (9)$$

³ここで、(5) 式を、 z を決めるときに x, y がどのように決まるのかということを表わしている式であると解釈しました。また、余りたくさん (-1) が出てこないように、 $z = -t$ とすることにしました。

⁴もちろん、 $\mathbf{p}_1 \in \mathbb{C}^3$ は、(8) 式で与えられるベクトルでなくとも、(7) 式の連立一次方程式の 0 でない解であれば何でも構いません。以下、 $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \in \mathbb{C}^3$ についても同様です。

という連立一次方程式を考えてみると、これは、(3) 式において、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

としたものであることが分かります。すると、これらの値も、(4) 式の条件を満たすことが分かりますから、(9) 式の連立一次方程式は解を持つことが分かります。そこで、例えば、(6) 式において、 $t = -1$ としてみると、(9) 式の連立一次方程式の解として、

$$\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

が取れることが分かります。

最後に、(10) 式で与えられるベクトル $\mathbf{p}_2 \in \mathbb{C}^3$ に対して、

$$(A - I)\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2 \quad (11)$$

という連立一次方程式を考えてみると、これは、(3) 式において、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

としたものであることが分かります。すると、これらの値も、(4) 式の条件を満たすことが分かりますから、(11) 式の連立一次方程式は解を持つことが分かります。そこで、例えば、(6) 式において、 $t = -3$ としてみると、(11) 式の連立一次方程式の解として、

$$\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が取れることが分かります。

以上より、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

として、

$$AP = P \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

となることが分かります。また、行列 P の行列式を計算してみると、

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} && \text{(二行目で展開)} \\
&= -(3-2) \\
&= -1 \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

となることが分かりますから、 P は正則行列であることが分かります。よって、(12) 式の両辺に左から P^{-1} を掛け算することで、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となることが分かります。

2 Jordan 標準形とは

さて、第 8 回の問 1 のところで見たように、「行列の標準形の問題」とは、

行列の標準形の問題

与えられた正方行列 A に対して、

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

となるような「見やすい形」の行列 Λ と正則行列 P を見つけよ。

という問題でした。また、これまでの演習の中でも、「見やすい形」として対角行列が取れる場合を中心に「行列の標準形の問題」について触れてきました。例えば、第 10 回の問 1 のところでは、対称行列のように「内積と相性が良いような行列」に対しては、実際に「対角化の問題」が解決できることを見ました。ところが、より一般に「行列の標準形の問題」を考察してみると、第 9 回の問 3 のところや第 11 回の問 2 のところでも注意したように、行列の世界では、普通の数の世界で考えると「無限小の数」のような役割を果たすベキ零行列と呼ばれる変わった行列が存在するために、「見やすい形」として対角行列を考えるだけでは十分ではないということが分かります。そこで、「見やすい形」として、対角行列をもう少し一般化したような行列を考える必要が出てきますが、この「一般化された対角行列」のことを Jordan 標準形 と呼びます。この演習でも、Jordan 標準形の理論的な側面について、順番に触れて行きたいと思いますが、そのための第一段階として、皆さんに、実例を通して、そもそも Jordan 標準形とはどのようなものであり、実際に Jordan 標準形を求めるためにはどのようなことをすればよいのかということに触れてもらうのも良いのではないかと考えて、問 1 を出題してみました。

そこで、まず、どのような形の行列を Jordan 標準形と呼ぶのかということを説明してみることになります。第 9 回の問 3 のところで注意したように、「見やすい形」の行列として対角行列を取ることができない場合の代表的な例が「ベキ零行列」と呼ばれる行列の場合で

す。第8回の問1のところでは、このようなベキ零行列が、特定の「番地割り」の仕方とは無関係に、「線型写像」として登場してくる典型的な例として、2次式以下の(実数係数の)多項式全体の集合

2次式以下の多項式全体の集合

$$V_2 = \{f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}[x] \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

上の

$$D = \frac{d}{dx} : V_2 \rightarrow V_2$$

という微分作用素を考えてみました。⁵ そのときにも注意しましたが、例えば、第8回の問1の問題を一般化して、勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、 n 次式以下の多項式全体の集合

n 次式以下の多項式全体の集合

$$V_n = \{f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x] \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

を考えて、 V_n 上で「微分」と「平行移動」の関係に「当たり」をつけようと思った場合には、線型写像

$$D = \frac{d}{dx} : V_n \rightarrow V_n$$

を、 $\{1, x, \dots, x^n\}$ という V_n の基底に関して、

基底 $\{1, x, \dots, x^n\}$ に関する線型写像 D の表現行列 \hat{D}

$$\hat{D} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{(n+1) \times (n+1)}$$

という行列で表現するよりも、 $\{1, \frac{x}{1!}, \dots, \frac{x^n}{n!}\}$ という V_n の基底に関して、

基底 $\{1, \frac{x}{1!}, \dots, \frac{x^n}{n!}\}$ に関する線型写像 D の表現行列 \check{D}

$$\check{D} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{(n+1) \times (n+1)} \quad (13)$$

⁵ここで、実数係数の一変数の多項式全体の集合を $\mathbb{R}[x]$ という記号を用いて表わしました。

という行列で表現する方が状況がより見やすくなることが分かります。⁶ すなわち、 D のようなベキ零な線型写像に対しては、(13) 式で与えられる行列表示 \hat{D} が「最も見やすい形の表示」であると考えられることができそうなことが分かります。

そこで、(13) 式のような形の行列も「見やすい形の行列」として採用しようということが考えられました。より一般に、勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ と勝手な複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\begin{array}{c} \text{Jordan 細胞} \\ \hline J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (14) \\ \hline n \square \end{array}$$

というように、対角線上に λ が並び、その一段上だけに 1 が並んだような行列を Jordan 細胞 (Jordan block) と呼びます。また、 $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ として、

$$\begin{array}{c} \text{Jordan 標準形} \\ \hline J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} \quad (15) \\ \hline \end{array}$$

というように、対角線上に Jordan 細胞がいくつか並んだような形の行列 J を Jordan 標準形と呼びます。特に、 $n = 1$ のときには、Jordan 細胞 $J_1(\lambda)$ は、

$$J_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda \end{pmatrix}$$

となりますから、

$$n_1 = n_2 = \dots = n_k = 1$$

となる場合として、すなわち、対角線上に並ぶ Jordan 細胞のサイズがすべて 1 である場合として、(15) 式は「対角行列」を含んでいることに注意します。

いま、

⁶例えば、勝手な自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して、 \hat{D}^m がどうなるのかということを考えるよりも、 \hat{D}^m がどうなるのかということを考える方がより簡単です。

「見やすい形」のベキ零行列

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ コ}}$

とすると, (14) 式で与えられる Jordan 細胞 $J_n(\lambda)$ は,

Jordan 細胞

$$J_n(\lambda) = \lambda I + N \tag{16}$$

というように, スカラー行列 λI と「見やすい形」のベキ零行列 N の和の形に表わすことができます. このようにスカラー行列と「見やすい形」のベキ零行列の和の形に表わして考えることにすると, 第 11 回の問 1 のところで見たように, 勝手な自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して, 二項展開を用いることで, 比較的簡単に $J_n(\lambda)^m$ を具体的に求めることができますし, より一般に, 勝手な多項式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ に対して, Taylor 展開を二項展開と解釈することで, 比較的簡単に $f(J_n(\lambda))$ を具体的に求めることもできます. また, 一般に, A_1, A_2, \dots, A_k を (必ずしもサイズが等しいとは限らない) 正方行列として,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}$$

というように, 対角線上に正方行列がいくつか並んだような形の行列 A を考えると, 勝手な自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して,

$$A^m = \begin{pmatrix} (A_1)^m & & & \\ & (A_2)^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & (A_k)^m \end{pmatrix} \tag{17}$$

となることが分かります. あるいは, より一般に, 勝手な多項式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ に対して,

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(A_1) & & & \\ & f(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(A_k) \end{pmatrix}$$

となることが分かります.⁷ よって, (15) 式で与えられる Jordan 標準形 J に対しても, 比較的簡単に J^m や $f(J)$ を具体的に求めることができることが分かります. その意味で, (15) 式で与えられる Jordan 標準形 J も「見やすい形」の行列であると考えられます.

このような形で「見やすい形」の行列を「対角行列」より少しだけ一般化して考えてみると, 実は, すべての n 行 n 列の複素行列は \mathbb{C}^n の基底を取り替えることで, Jordan 標準形に変形することができるということが分かります. すなわち, 「見やすい形」の行列として, 対角行列だけでなく, Jordan 標準形まで許せば, すべての n 行 n 列の複素行列 A に対して, $P^{-1}AP$ が「見やすい形」になるような正則行列 P が見つかるということが分かります. こうして, 「行列の標準形の問題」が一般的に解決することになります.

3 Jordan 標準形に「当たり」をつけるには

そこで, 取りあえず, 「Jordan 標準形の存在」という理論的な側面について考えることは, 後に回すことにして, 与えられた行列に対して, 実際に Jordan 標準形を求めるためにはどうすればよいのかということを考えてみることにします. 話を具体的にするために, ここでは, 問1の例と合わせて, 3行3列の行列の場合に説明してみることにします.

さて, 問1の問題文の中でも注意したように, 3行3列の行列の場合には, Jordan 標準形は, $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ を互いに異なる複素数として, 本質的に,

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_5 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_6 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

という六種類しか存在しないことが分かります. このとき, 例えば, J_3 という行列の対角

⁷例えば,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$$

であるとして,

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m \in \mathbb{C}[x]$$

とすると, (17) 式から,

$$\begin{aligned} f(A) &= a_0I + a_1A + \cdots + a_mA^m \\ &= a_0 \cdot \begin{pmatrix} I & \\ & I \end{pmatrix} + a_1 \cdot \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix} + \cdots + a_m \cdot \begin{pmatrix} (A_1)^m & \\ & (A_2)^m \end{pmatrix} \quad ((17) \text{ 式から}) \\ &= \begin{pmatrix} a_0I + a_1A_1 + \cdots + a_m(A_1)^m & \\ & a_0I + a_1A_2 + \cdots + a_m(A_2)^m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f(A_1) & \\ & f(A_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることが分かります.

線上に現われる Jordan 細胞の順番を取り替えて,

$$J_3' = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

という行列を考えてみると, J_3' という Jordan 標準形は上のリストには現われてはいませんが, 例えば,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

という正則行列を考えてみると,

$$P^{-1}J_3'P = J_3 \tag{18}$$

となることが分かりますから, J_3 と J_3' は本質的に同じ Jordan 標準形であると考えることができます.

ここで, (18) 式のような関係が成り立つことは, 例えば, 次のように考えると納得できるかもしれません. いま, 数ベクトル空間 \mathbb{C}^3 を線型空間と思ったものを,

$$V = \mathbb{C}^3$$

として, 行列 J_3' を掛け算することによって定まる V 上の線型写像を,

$$L: V \rightarrow V$$

と表わすことにします. すなわち, 線型空間 $V = \mathbb{C}^3$ の最初に与えられている「旧番地割り」に関する線型写像 L の表現行列が J_3' であると考えてみます. このことは, $V = \mathbb{C}^3$ の「旧番地割り」を与える基底を,

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V = \mathbb{C}^3$$

として,

$$\begin{aligned} \left(L(\mathbf{e}_1) \quad L(\mathbf{e}_2) \quad L(\mathbf{e}_3) \right) &= \left(\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3 \right) J_3' \\ &= \left(\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3 \right) \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{19}$$

となることを意味しますから,

$$\begin{cases} L(\mathbf{e}_1) = \mu\mathbf{e}_1 \\ L(\mathbf{e}_2) = \lambda\mathbf{e}_2 \\ L(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2 + \lambda\mathbf{e}_3 \end{cases} \tag{20}$$

となることが分かります. ここで, (20) 式に表われる式の順番を取り替えて, 一番目の式を三番目に書くことにすると,

$$\begin{cases} L(\mathbf{e}_2) = \lambda \mathbf{e}_2 \\ L(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2 + \lambda \mathbf{e}_3 \\ L(\mathbf{e}_1) = \mu \mathbf{e}_1 \end{cases}$$

となることが分かりますが, このことは, (19) 式を,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} L(\mathbf{e}_2) & L(\mathbf{e}_3) & L(\mathbf{e}_1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} J_3 \end{aligned} \quad (21)$$

というように書き直せることを意味しています. したがって, (21) 式から, $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$ という基底を用いて, $V = \mathbb{C}^3$ の「番地割り」を「新番地割り」に取り替えると,

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^3)_{\text{旧}} & \xrightarrow{J_3'} & (\mathbb{C}^3)_{\text{旧}} \\ \parallel & & \parallel \\ V & \xrightarrow{L} & V \\ \parallel & & \parallel \\ (\mathbb{C}^3)_{\text{新}} & \xrightarrow{J_3} & (\mathbb{C}^3)_{\text{新}} \end{array}$$

というように, V の「新番地割り」に関する線型写像 L の表現行列が J_3 となることが分かります. ここで, 「新番地割り」を与える基底 $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$ は, 「旧番地割り」を与える基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ を用いて,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と表わせることが分かりますから, 「表現行列の変換公式」から,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

として,

$$P^{-1} J_3' P = J_3$$

となることが分かります. 全く同様に, 一般に, Jordan 標準形 J の対角線上に現われる Jordan 細胞の順番を取り替えて, 異なる形の Jordan 標準形 J' を考えたとしても, これらの行列は \mathbb{C}^n の基底の順番を取り替えることにより, 互いに移り合えることが分かりますから, 本質的に同じ標準形であると考えられます.

さて, Jordan 標準形は「見やすい形の上三角行列」であると考えられますが, 一般に, 上三角行列

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_{n-1} & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

の特性多項式は,

$$\varphi_{\Lambda}(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n) \quad (22)$$

となることに注意します. また, n 行 n 列の行列 A と n 行 n 列の正則行列 P に対して,

特性多項式の共役不変性

$$\varphi_A(x) = \varphi_{P^{-1}AP}(x) \quad (23)$$

となることにも注意します. そこで, いま, 行列 A の Jordan 標準形を J とすると,

$$P^{-1}AP = J$$

となる正則行列 P が存在するということになりますから, (23) 式から,

$$\varphi_A(x) = \varphi_J(x) \quad (24)$$

となることが分かります. よって, (22) 式, (24) 式から, 行列 A の特性多項式 $\varphi_A(x)$ を求めて, $\varphi_A(x)$ を一次式の積に分解することにより, 行列 A の Jordan 標準形 J の「対角成分」が求まることが分かります. 特に, 行列 A が対角化可能のときには, すなわち, J が対角行列となるときには, 特性多項式 $\varphi_A(x)$ を求めることで, 行列 A の Jordan 標準形 J を求めることができることが分かります. 一方, J_3, J_5, J_6 のように, 対角成分以外に, 1 がいくつか現われる場合には, 特性多項式だけからでは, 1 がどのように現われるのかという情報までは拾えないことになります.

そこで, さらに, 最小多項式 $\psi_A(x)$ に注目するとどのようなことが分かるのかということを考えてみることにします. いま, 第 11 回の問 1 と同様にして, 勝手な多項式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ に対して, $f(J_1), f(J_2), \dots, f(J_6)$ を求めてみると, それぞれ,

$$\begin{aligned} f(J_1) &= \begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & f(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & f(\nu) \end{pmatrix}, & f(J_2) &= \begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & f(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & f(\mu) \end{pmatrix}, \\ f(J_3) &= \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & 0 \\ 0 & f(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & f(\mu) \end{pmatrix}, & f(J_4) &= \begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & f(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}, \\ f(J_5) &= \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & 0 \\ 0 & f(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}, & f(J_6) &= \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2!}f''(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることが分かりますから、

$$\begin{cases} f(J_1) = O \iff f(\lambda) = f(\mu) = f(\nu) = 0 \\ f(J_2) = O \iff f(\lambda) = f(\mu) = 0 \\ f(J_3) = O \iff f(\lambda) = f'(\lambda) = f(\mu) = 0 \\ f(J_4) = O \iff f(\lambda) = 0 \\ f(J_5) = O \iff f(\lambda) = f'(\lambda) = 0 \\ f(J_6) = O \iff f(\lambda) = f'(\lambda) = f''(\lambda) = 0 \end{cases}$$

となることが分かります。⁸ よって、それぞれの Jordan 標準形に対する最小多項式 $\psi_{J_i}(t)$ は、

$$\begin{cases} \psi_{J_1}(x) = (x - \lambda)(x - \mu)(x - \nu) \\ \psi_{J_2}(x) = (x - \lambda)(x - \mu) \\ \psi_{J_3}(x) = (x - \lambda)^2(x - \mu) \\ \psi_{J_4}(x) = (x - \lambda) \\ \psi_{J_5}(x) = (x - \lambda)^2 \\ \psi_{J_6}(x) = (x - \lambda)^3 \end{cases} \quad (25)$$

となることが分かります。⁹ ここで、(25) 式に登場する最小多項式の形は、それぞれの Jordan 標準形に対して、互いに異なる形をしているということに注意します。すると、第 11 回の問 2 のところで見たとおり、一般に、 n 行 n 列の行列 A と n 行 n 列の正則行列 P に対して、

最小多項式の共役不変性

$$\psi_A(x) = \psi_{P^{-1}AP}(x)$$

となることが分かりますから、3 行 3 列の行列 A の場合には、

最小多項式をもとにして、Jordan 標準形に「当たり」をつける

$$\psi_A(x) = \psi_{J_{i_0}}(x) \quad (26)$$

となるような Jordan 標準形 J_{i_0} として、行列 A の Jordan 標準形が求まることが分かります。¹⁰

ただし、このように「最小多項式の形を調べるだけで Jordan 標準形が分かる」というのは、3 行 3 列の行列というサイズの小さな行列を考えているために、Jordan 標準形の種

⁸ 皆さん、確かめてみて下さい。

⁹ あるいは、問 1 と同様にして、特性多項式 $\varphi_{J_i}(x)$ を割り切るような多項式に対して、行列 J_i を代入して零行列 O になるかどうかを順番に確かめることにより、最小多項式 $\psi_{J_i}(x)$ を求めることもできます。

¹⁰ ここで、 J_2 の場合だけは、最小多項式 $\psi_{J_2}(x) = (x - \lambda)(x - \mu)$ を見ただけでは、対角成分が λ, λ, μ なのか、 λ, μ, μ なのかということが決定できませんので、Jordan 標準形を決定するためには、特性多項式 $\varphi_{J_2}(x) = (x - \lambda)^2(x - \mu)$ の情報も必要になります。

類が少ないという特殊性から成り立つ事実であるということに注意します。実際、例えば、

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

という Jordan 標準形に対して、最小多項式 $\psi_J(x)$, $\psi_{J'}(x)$ を、それぞれ求めてみると、

$$\begin{aligned} \psi_J(x) &= (x - \lambda)^2 \\ \psi_{J'}(x) &= (x - \lambda)^2 \end{aligned}$$

というように同じ多項式になることが分かります。

一般に、

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} \quad (27)$$

を Jordan 標準形とすると、2 節でも注意したように、勝手な多項式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ に対して、

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(J_{n_1}(\lambda_1)) & & & \\ & f(J_{n_2}(\lambda_2)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(J_{n_k}(\lambda_k)) \end{pmatrix}$$

となることが分かりますから、

$$f(J) = O \iff f(J_{n_1}(\lambda_1)) = f(J_{n_2}(\lambda_2)) = \cdots = f(J_{n_k}(\lambda_k)) = O \quad (28)$$

となることが分かります。一方、第 11 回の問 1 のところで見たとように、Jordan 細胞

$$J_n(\lambda) = \lambda I + N$$

に対しては、

$$\begin{aligned} f(J_n(\lambda)) &= f(\lambda I + N) \\ &= f(\lambda)I + f'(\lambda)N + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!}N^{n-1} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{f''(\lambda)}{2!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}}_{n \times n} \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$f(J_n(\lambda)) = O \iff f(\lambda) = f'(\lambda) = \dots = f^{(n-1)}(\lambda) = 0 \quad (29)$$

となることが分かります. したがって, (28) 式, (29) 式から,

$$f(J) = O \iff \begin{cases} f(\lambda_1) = f'(\lambda_1) = \dots = f^{(n_1-1)}(\lambda_1) = 0 \\ f(\lambda_2) = f'(\lambda_2) = \dots = f^{(n_2-1)}(\lambda_2) = 0 \\ \vdots \\ f(\lambda_k) = f'(\lambda_k) = \dots = f^{(n_k-1)}(\lambda_k) = 0 \end{cases} \quad (30)$$

となることが分かります.

ここで, 例えば,

$$J = \begin{pmatrix} J_2(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(\lambda) \end{pmatrix} \left(= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right)$$

として, (30) 式の条件を書き下してみると,

$$f(J) = O \iff \begin{cases} f(\lambda) = f'(\lambda) = 0 \\ f(\lambda) = 0 \\ f(\lambda) = 0 \end{cases} \quad (31)$$

$$\iff f(\lambda) = f'(\lambda) = 0$$

というように, (31) 式の右辺の二番目, 三番目の式は, 一番目の式に「食べられて」しまうことが分かります. すなわち, Jordan 標準形 J における二番目, 三番目の Jordan 細胞 $J_1(\lambda)$ に対する

$$f(J_1(\lambda)) = O$$

という条件は, 一番目の Jordan 細胞 $J_2(\lambda)$ に対する

$$f(J_2(\lambda)) = O$$

という条件に「食べられて」しまうことが分かります.

全く同様にして, (27) 式における $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ の中に互いに等しい固有値が存在する場合には, (30) 式の右辺の条件は, それぞれの固有値に対して, 最もサイズの大きな Jordan 細胞に対応した条件だけが残る, よりサイズの小さな Jordan 細胞に対応した条件は「食べられて」しまうことが分かります. したがって, Jordan 標準形 J の相異なる固有値を $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_L$ として,¹¹ それぞれの固有値に対して, 最もサイズの大きな Jordan 細胞を

¹¹(27) 式における $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ の中には互いに等しい複素数が存在する可能性があるため, これらの複素数のうち, 相異なる複素数を $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_L$ というように名前を変えて表わすことにしました.

$J_{m_1}(\mu_1), J_{m_2}(\mu_2), \dots, J_{m_L}(\mu_L)$ とすると,

$$f(J) = O \iff \begin{cases} f(\mu_1) = f'(\mu_1) = \dots = f^{(m_1-1)}(\mu_1) = 0 \\ f(\mu_2) = f'(\mu_2) = \dots = f^{(m_2-1)}(\mu_2) = 0 \\ \vdots \\ f(\mu_k) = f'(\mu_k) = \dots = f^{(m_L-1)}(\mu_L) = 0 \end{cases}$$

となることが分かりますから, Jordan 標準形 J の最小多項式 $\psi_J(x)$ は,

Jordan 標準形 J の最小多項式 $\psi_J(x)$

$$\psi_J(x) = (x - \mu_1)^{m_1} (x - \mu_2)^{m_2} \dots (x - \mu_L)^{m_L}$$

となることが分かります.

以上の議論から, 一般に, 正方行列 A に対して, 行列 A の特性多項式 $\varphi_A(x)$ を求めることにより, 行列 A の Jordan 標準形 J の対角成分の情報が得られ, さらに, 行列 A の最小多項式 $\psi_A(x)$ を求めることにより, それぞれの固有値に対応する最もサイズの大きな Jordan 細胞の情報が得られるということが分かりました.

上で見たように, 行列 A が 3 行 3 列の行列の場合には, 行列のサイズが小さいという特殊性から, これらの情報だけで, 行列 A の Jordan 標準形を決定することができることが分かります. 一方, 行列 A が 4 行 4 列以上の行列の場合には, 一般には, 特性多項式 $\varphi_A(x)$ や最小多項式 $\psi_A(x)$ を調べるだけでは Jordan 標準形を絞り切ることができず, Jordan 標準形を決定するためには, さらなる考察が必要であることが分かります. この点に関しては, Jordan 標準形の一般論を説明した後で立ち返って考えてみる方が, より良く理解できるのではないかと思いますので, ここでは, この問題には立ち入らないことにします. 皆さんは, 4 行 4 列以上の行列の場合にも, 何らかの方法で Jordan 標準形に「当たり」を付けることができるということを取りあえずは認めて, 以下の説明を読み替えてみて下さい.

4 Jordan 標準形を求めるには

さて, 3 行 3 列の行列 A の場合には, (26) 式のように, 最小多項式を調べることで, Jordan 標準形 J_{i_0} に「当たり」が付きますから, 「行列の標準形の問題」を解決するためには, 後は,

$$P^{-1}AP = J_{i_0} \tag{32}$$

となるような正則行列 P を求めればよいということになります. そのためのアイデアは, 「行列の対角化の問題」を考えたときと全く同様で, (32) 式の方程式をそのまま扱うのではなく, (32) 式の両辺に左から P を掛けて,

$$AP = PJ_{i_0} \tag{33}$$

という形に変形して考えるということと, (33) 式が「行列 P の列ベクトルに対して何を意味しているのか」ということを考えるということにあります. そこで, いま, 正則行列 P

の列ベクトルを $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \in \mathbb{C}^3$ と書くことにして、行列 P を、

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix}$$

というように表わしたときに、(32) 式という方程式が、 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \in \mathbb{C}^3$ に対するどのような方程式に読み替えることができるのかということを考えてみます。

まず、 $i_0 = 1, 2, 4$ の場合には、 J_{i_0} は対角行列になりますから、「標準形の問題」とは「対角化の問題」に他なりません。そこで、(32) 式を、

$i_0 = 1, 2, 4$ の場合の「標準形の問題」

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (34)$$

というように表わすことにすると、第 9 回の問 1 のところで見たとおり、 P が正則行列であるという条件のもとで、

(34) 式の書き直し

$$\begin{aligned} P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} &\iff AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \\ &\iff A \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \\ &\iff A\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i, \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

なることが分かります。したがって、この場合には、

$$(A - \lambda_i I) \mathbf{p}_i = \mathbf{0}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

という連立一次方程式を解くことによって、(34) 式を満たすような正則行列 P が求まることとなります。

次に、 $i_0 = 3$ の場合には、(32) 式は、

$i_0 = 3$ の場合の「標準形の問題」

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (35)$$

ということになりますが、 P が正則行列であるという条件のもとで、

(35) 式を書き直し

$$\begin{aligned}
 P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \iff AP = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \\
 &\iff A \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} A\mathbf{p}_1 = \lambda\mathbf{p}_1 \\ A\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \lambda\mathbf{p}_2 \\ A\mathbf{p}_3 = \mu\mathbf{p}_3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

となることが分かります。したがって、この場合には、

$$\begin{cases} (A - \lambda I)\mathbf{p}_1 = \mathbf{0} \\ (A - \lambda I)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \end{cases}$$

という連立一次方程式を順番に解くことと、

$$(A - \mu I)\mathbf{p}_3 = \mathbf{0}$$

という連立一次方程式を解くことによって、(35) 式を満たすような正則行列 P が求まることとなります。

さらに、 $i_0 = 5$ の場合には、(32) 式は、

$i_0 = 5$ の場合の「標準形の問題」

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{36}$$

ということになりますが、 P が正則行列であるという条件のもとで、

(36) 式を書き直し

$$\begin{aligned}
 P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \iff AP = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\
 &\iff A \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} A\mathbf{p}_1 = \lambda\mathbf{p}_1 \\ A\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \lambda\mathbf{p}_2 \\ A\mathbf{p}_3 = \lambda\mathbf{p}_3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

となることが分かります. したがって, この場合には,

$$\begin{cases} (A - \lambda I)\mathbf{p}_1 = \mathbf{0} \\ (A - \lambda I)\mathbf{p}_3 = \mathbf{0} \\ (A - \lambda I)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \end{cases} \quad (37)$$

という連立一次方程式を順番に解くことによって, (36) 式を満たすような正則行列 P が求まることとなります. ただし, この場合に注意しないといけないことは, 与えられたベクトル $\mathbf{p}_1 \in \mathbb{C}^3$ に対して,

$$(A - \lambda I)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1$$

という連立一次方程式が解を持つためには,

$$\mathbf{p}_1 \in \text{Im}(A - \lambda I) = \{(A - \lambda I)\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3 \mid \mathbf{u} \in \mathbb{C}^3\}$$

でなければならないということです. したがって,

$$(A - \lambda I)\mathbf{p} = \mathbf{0}$$

という連立一次方程式の解全体の集合

$$\text{Ker}(A - \lambda I) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{C}^3 \mid (A - \lambda I)\mathbf{p} = \mathbf{0}\}$$

を求めたときに, $\text{Ker}(A - \lambda I)$ の基底を, 勝手にひとつ取ってきて, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3\}$ と定めるのではなく, まず, $\text{Im}(A - \lambda I)$ という集合を求めておいて, \mathbf{p}_1 を,

$$\mathbf{p}_1 \in \text{Im}(A - \lambda I)$$

となるように選んでから, 次に, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3\}$ が $\text{Ker}(A - \lambda I)$ の基底になるように \mathbf{p}_3 を選ぶ必要があります. このように, 少し注意しなければならない点がありますが, 基本的には (37) 式の連立一次方程式を順番に解くことによって, (36) 式を満たすような正則行列 P が求まることとなります.

最後に, $i_0 = 6$ の場合には, (32) 式は,

$i_0 = 6$ の場合の「標準形の問題」

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (38)$$

ということになりますが, P が正則行列であるという条件のもとで,

(38) 式の書き直し

$$\begin{aligned}
 P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \iff AP = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\
 &\iff A \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} A\mathbf{p}_1 = \lambda\mathbf{p}_1 \\ A\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \lambda\mathbf{p}_2 \\ A\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2 + \lambda\mathbf{p}_3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

となることが分かります。したがって、この場合には、問1の解答で見たように、

$$\begin{cases} (A - \lambda I)\mathbf{p}_1 = \mathbf{0} \\ (A - \lambda I)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \\ (A - \lambda I)\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2 \end{cases}$$

という連立一次方程式を順番に解くことによって、(38)式を満たすような正則行列 P が求まることになります。

以上から、「行列の対角化の問題」の場合には、

$$(A - \lambda I)\mathbf{p} = \mathbf{0}$$

という連立一次方程式を「一回」解けばよいというのに対して、Jordan 標準形が必ずしも対角行列に取れない場合には、

$$(A - \lambda I)\mathbf{p} = \mathbf{q} \tag{39}$$

という形の連立一次方程式を「順番に」解かなければならないという差はありますが、基本的には、(39)式の形の連立一次方程式を解くことにより、「行列の標準形の問題」を解決することができるということが分かります。

5 一般固有ベクトルとは

さて、3節でも注意したように、3行3列の行列の場合には、Jordan 標準形は、 $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ を互いに異なる複素数として、本質的に、

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, & J_2 &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, & J_3 &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \\
 J_4 &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, & J_5 &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, & J_6 &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

という六種類しか存在しないことがわかります。また、これらの Jordan 標準形に対する最小多項式は、それぞれ、

$$\begin{cases} \psi_{J_1}(x) = (x - \lambda)(x - \mu)(x - \nu) \\ \psi_{J_2}(x) = (x - \lambda)(x - \mu) \\ \psi_{J_3}(x) = (x - \lambda)^2(x - \mu) \\ \psi_{J_4}(x) = (x - \lambda) \\ \psi_{J_5}(x) = (x - \lambda)^2 \\ \psi_{J_6}(x) = (x - \lambda)^3 \end{cases} \quad (40)$$

となることがわかります。いま、上の六種類の Jordan 標準形のうち、対角行列となるのは、 J_1, J_2, J_4 の場合だけですが、これを、(40) 式における最小多項式 $\psi_{J_i}(x)$ の形と比べてみると、

$$J_i \text{ が対角行列} \iff \psi_{J_i}(x) = 0 \text{ は重根を持たない.}$$

となることがわかります。

一般に、 $n \in \mathbb{N}$ を勝手な自然数として、 J を n 行 n 列の Jordan 標準形とすると、3 節で見たように、Jordan 標準形 J の相異なる固有値を $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_L$ として、それぞれの固有値に対して、最もサイズの大きな Jordan 細胞を $J_{m_1}(\mu_1), J_{m_2}(\mu_2), \dots, J_{m_L}(\mu_L)$ とすると、Jordan 標準形 J の最小多項式は、

Jordan 標準形 J の最小多項式 $\psi_J(x)$

$$\psi_J(x) = (x - \mu_1)^{m_1}(x - \mu_2)^{m_2} \cdots (x - \mu_L)^{m_L}$$

という形で与えられることがわかります。このことと、

$$J \text{ が対角行列} \iff J \text{ のすべての Jordan 細胞のサイズが } 1 \text{ である.}$$

ということに注意すると、一般に、

Jordan 標準形 J が対角行列になるための条件

$$J \text{ が対角行列} \iff \psi_J(x) = 0 \text{ は重根を持たない.}$$

となることがわかります。すると、第 11 回の問 2 のところで見たと同じように、勝手な n 行 n 列の行列 A と n 行 n 列の正則行列 P に対して、

最小多項式の共役不変性

$$\psi_A(x) = \psi_{P^{-1}AP}(x)$$

となることがわかりますから、「Jordan 標準形の存在」を認めると、

行列 A が対角化可能であるための条件

$$A \text{ が対角化可能} \iff \psi_A(x) = 0 \text{ は重根を持たない} \quad (41)$$

となることがわかります。

第9回の問3のところで見たとように、「線型空間」という立場で見直すと、 n 行 n 列の行列 A が対角化可能であるということは、 A の固有ベクトルからなる \mathbb{C}^n の基底が存在するということであると解釈することができます。したがって、(41) 式より、

$$\psi_A(x) = 0$$

が重根を持つ場合には、行列 A を掛け算することによって定まる \mathbb{C}^n 上の線型写像

$$L_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

を「見やすい形」で表現するような \mathbb{C}^n の「上手い基底」として、「固有ベクトル」だけを考えるのでは不十分であることが分かります。実際、問1の例では、

$$\psi_A(x) = (x - 1)^3$$

となりますが、行列 A の固有値 1 に対応する固有ベクトル空間

$$\begin{aligned} V(1) &= \{ \mathbf{p} \in \mathbb{C}^3 \mid A\mathbf{p} = \mathbf{p} \} \\ &= \text{Ker}(A - I) \end{aligned}$$

は、

$$\begin{aligned} V(1) &= \left\{ \left(\begin{array}{c} t \\ t \\ -t \end{array} \right) \in \mathbb{C}^3 \mid t \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \mathbb{C} \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

となることが分かります。したがって、この場合、固有ベクトルは次元分しか存在しないことが分かります。

そこで、問1の場合には、 $\mathbf{0} \neq \mathbf{p}_1 \in V(1)$ を、勝手にひとつ取ってきて、さらに、

$$\begin{cases} (A - I)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \\ (A - I)\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2 \end{cases} \quad (42)$$

という連立一次方程式を満たすようなベクトル $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \in \mathbb{C}^3$ を順番に求めることにより、 \mathbb{C}^3 の「上手い基底」 $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ を定めることを考えました。このとき、

$$\mathbf{p}_1 \in V(1) = \text{Ker}(A - I) \quad (43)$$

であることに注意すると、(42) 式から、

$$\begin{aligned} (A - I)^2 \mathbf{p}_2 &= (A - I)\mathbf{p}_1 && ((42) \text{ 式から}) \\ &= \mathbf{0} && ((43) \text{ 式から}) \end{aligned} \quad (44)$$

$$(A - I)^3 \mathbf{p}_3 = (A - I)^2 \mathbf{p}_2 \quad ((42) \text{ 式から})$$

$$= \mathbf{0} \quad ((44) \text{ 式から})$$

となることが分かります. すなわち,

$$(A - I)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \neq \mathbf{0}$$

$$(A - I)\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2 \neq \mathbf{0}$$

となりますから, $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \in \mathbb{C}^3$ は, どちらも行列 A の固有値 1 に対応する固有ベクトルにはなりません, 固有ベクトルの条件を少し弱めたような

$\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ は「固有ベクトル」の条件を少し弱めたような条件を満たす

$$(A - I)^2 \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$$

$$(A - I)^3 \mathbf{p}_3 = \mathbf{0}$$

という条件を満たすことが分かります.

一般に, $n \in \mathbb{N}$ を勝手な自然数として, n 行 n 列の行列 A と複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して, $(A - \lambda I)$ という行列を何度か掛け算してゆくと零ベクトルになってしまうような \mathbb{C}^n のベクトル全体の集合

行列 A の (固有値 λ に対応した) 一般固有ベクトル空間

$$V(\lambda)_{\text{gen}} = \{ \mathbf{p} \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda I)^m \mathbf{p} = \mathbf{0} \text{ となるような自然数 } m \in \mathbb{N} \text{ が存在する.} \}$$

を, 行列 A の (固有値 λ に対応した) 一般固有ベクトル空間と呼びます.¹² また, 一般固有ベクトル空間 $V(\lambda)_{\text{gen}}$ の元を, 行列 A の (固有値 λ に対応した) 一般固有ベクトルと呼びます. すると, 問 1 の結果は, 「固有ベクトル」の代わりに「一般固有ベクトル」を考えると, 行列 A の性質が「見やすい形」で表現されるような A の一般固有ベクトルからなる \mathbb{C}^3 の「上手い基底」が存在するということに解釈することができることが分かります.

このように, 固有ベクトルの概念を一般化して考えることにより, 与えられた n 行 n 列の行列 A に対して, 行列 A を掛け算することによって定まる \mathbb{C}^n 上の線型写像

$$L_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

が「見やすい形」で表現されるように, 行列 A の一般固有ベクトルからなる \mathbb{C}^n の「上手い基底」を定めることを考えるということが, Jordan 標準形の考え方の基本にあります.

第 9 回の問 3 のところで見たように, 行列 A の異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L \in \mathbb{C}$ としたときに, 線型空間 \mathbb{C}^n が,

¹²ここで, 普通の固有ベクトル空間

$$V(\lambda) = \{ \mathbf{p} \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda I)\mathbf{p} = \mathbf{0} \}$$

と混同しないように, 一般固有ベクトル空間 (generalized eigenvector space) を表わすのに, 「gen」という添え字を付けて表わすことにしました.

行列 A の固有ベクトル空間による線型空間 \mathbb{C}^n の直和分解

$$\mathbb{C}^n = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_L) \quad (45)$$

というように固有ベクトル空間だけを用いて直和分解できることが分かれば「対角化の問題」は解決することになります。ところが、上でも注意したように、一般には、固有ベクトルが十分たくさん存在しないために、

$$\mathbb{C}^n \supsetneq V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_N)$$

となってしまう、(45) 式は成り立たないことが分かります。そこで、「固有ベクトル空間」を「一般固有ベクトル空間」に置き換えることで、

「Jordan 標準形の存在」を示すための基本的な戦略

(i) \mathbb{C}^n が、

$$\mathbb{C}^n = V(\lambda_1)_{\text{gen}} \oplus V(\lambda_2)_{\text{gen}} \oplus \cdots \oplus V(\lambda_N)_{\text{gen}}$$

というように、行列 A の一般固有ベクトル空間の直和に分解することを確かめる。

(ii) それぞれの一般固有ベクトル空間 $V(\lambda_i)_{\text{gen}}$ に対して、「上手い基底」を定めることを考える。

という二つのステップを通して「行列の標準形の問題」を解決することを考えるということが、「Jordan 標準形の存在」を示すための基本的な戦略になります。

6 問2の解答

第6回問2のところで見たとおり、 $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{m_0-1}\}$ が線型独立となることを確かめるためには、 $c_0, c_1, \dots, c_{m_0-1} \in \mathbb{C}$ として、

$$c_0 \mathbf{u}_0 + c_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + c_{m_0-1} \mathbf{u}_{m_0-1} = \mathbf{0} \implies c_0 = c_1 = \cdots = c_{m_0-1} = 0 \quad (46)$$

となることが分かればよいということになります。

そこで、いま、

$$c_0 \mathbf{u}_0 + c_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + c_{m_0-1} \mathbf{u}_{m_0-1} = \mathbf{0} \quad (47)$$

と仮定してみます。このとき、ベクトル $\mathbf{u}_k \in V$, ($k = 0, 1, \dots, m_0 - 1$) の定義と、

$$N^{m_0} = O$$

となることから、

$$\mathbf{u}_0 \xrightarrow{N} \mathbf{u}_1 \xrightarrow{N} \mathbf{u}_2 \xrightarrow{N} \cdots \xrightarrow{N} \mathbf{u}_{m_0-2} \xrightarrow{N} \mathbf{u}_{m_0-1} \xrightarrow{N} \mathbf{0} \quad (48)$$

となっていることに注意して、(47) 式の両辺に N を施してみると、

$$c_0 \mathbf{u}_1 + c_1 \mathbf{u}_2 + \cdots + c_{m_0-2} \mathbf{u}_{m_0-1} = \mathbf{0}$$

となることが分かります. 全く同様にして, (47) 式の両辺に N^{m_0-1} を施してみると, すなわち, N を $(m_0 - 1)$ 回施してみると,

$$c_0 \mathbf{u}_{m_0-1} = \mathbf{0} \quad (49)$$

となることが分かります.¹³ いま, \mathbf{u}_0 の取り方から,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{m_0-1} &= N^{m_0-1} \mathbf{u}_0 \\ &\neq \mathbf{0} \end{aligned}$$

となることが分かりますから, (49) 式より,

$$c_0 = 0$$

となることが分かります. すると, (47) 式から,

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + c_{m_0-1} \mathbf{u}_{m_0-1} = \mathbf{0} \quad (50)$$

となることが分かりますが, (48) 式に注意して, (50) 式の両辺に N^{m_0-2} を施してみると,

$$c_1 \mathbf{u}_{m_0-1} = \mathbf{0}$$

となることが分かります. よって, $\mathbf{u}_{m_0-1} \neq \mathbf{0}$ であることから,

$$c_1 = 0$$

となることが分かります. 以下, 同様の議論を繰り返すと, 結局,

$$c_0 = c_1 = \cdots = c_{m_0-1} = 0$$

となることが分かります.¹⁴

以上の議論から, (46) 式が成り立つことが分かりましたから, $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_{m_0-1}\}$ が線型独立となることが分かります.

7 ベキ零行列の標準形について (3 行 3 列の場合)

さて, これまでに何度か注意してきたように, 「行列の標準形の問題」を考えたときに, 「見やすい形の行列」として対角行列を取ることのできない代表的な例がベキ零行列です. そこで, 「ベキ零行列に対する標準形」を考えてみるための準備として, 問 2 を出題してみました.

皆さん良くご存じのように, 実数や複素数など「普通の数の世界」では, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $x^n = 0$ となるような数は $x = 0$ しか存在しません. 一方, 「行列の世界」

¹³(47) 式の両辺に N^{m_0-1} を施すことで, (49) 式が得られるということがすぐには納得できない方は, (47) 式の両辺に N^{m_0-1} を一度に施さずに, N を $(m_0 - 1)$ 回, 順番順番に施したときに, それぞれのステップでどのような式が得られることになるのかということを考えてみて下さい.

¹⁴皆さん, 確かめてみて下さい. 数学的帰納法を用いると, スッキリと議論することができます.

では、 $N \neq O$ であるのに、 $N^n = O$ となるようなベキ零行列がたくさん存在します。¹⁵ このような「ベキ零行列の存在」が、実数や複素数など「普通の数の世界」と比較したときに、「行列の世界」の持つ際立った特徴であると考えられます。実際、Jordan 標準形の存在を議論する場合にも、5 節で述べた

「Jordan 標準形の存在」を示すための基本的な戦略

(i) \mathbb{C}^n が、

$$\mathbb{C}^n = V(\lambda_1)_{\text{gen}} \oplus V(\lambda_2)_{\text{gen}} \oplus \cdots \oplus V(\lambda_N)_{\text{gen}}$$

というように、行列 A の一般固有ベクトル空間の直和に分解することを確かめる。

(ii) それぞれの一般固有ベクトル空間 $V(\lambda_i)_{\text{gen}}$ に対して、「上手い基底」を定めることを考える。

という二つのステップのうち、二番目の (ii) というステップを通して、「ベキ零行列の標準形の問題」が基本的な役割を果たすこととなります。

そこで、話を具体的にするために、ここでは、3 行 3 列のベキ零行列に対して、「標準形の問題」を考えてみることにします。すなわち、3 行 3 列のベキ零行列 N が、勝手にひとつ与えられているとして、行列 N を掛け算することによって定まる

$$L_N : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$$

という線型写像に対する表現行列が「見やすい形」になるような \mathbb{C}^3 の「上手い基底」が存在するかどうかということを考えてみることにします。そのために、まず、このような \mathbb{C}^3 の「上手い基底」 $\{p_1, p_2, p_3\}$ が存在すると仮定すると、 $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{C}^3$ というベクトルはどのようなものでなければならないのかということを考えてみることにします。いま、 \mathbb{C}^3 の最初に与えられている「旧番地割り」に対応する基底を、

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

と表わすことにして、 $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{C}^3$ を列ベクトルとする 3 行 3 列の正則行列を、

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$$

¹⁵例えば、

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると、 $N^2 = O$ となりますが、 N だけでなく、2 行 2 列の勝手な正則行列 P に対して、

$$\begin{aligned} (P^{-1}NP)^2 &= P^{-1}NPP^{-1}NP \\ &= P^{-1}N^2P \\ &= P^{-1}OP \\ &= O \end{aligned}$$

となることが分かりますから、 $P^{-1}NP$ という行列も、すべてベキ零行列になることが分かります。

と表わすことにします. すると, \mathbb{C}^3 の基底を $\{e_1, e_2, e_3\}$ から $\{p_1, p_2, p_3\}$ に取り替えて, \mathbb{C}^3 の「番地割り」をやり直すと, $\{p_1, p_2, p_3\}$ を基底とする「新番地割り」のもとで, 線型写像 L_N は,

$$P^{-1}NP$$

という行列で表現されるということになります.

そこで, まず,

3 行 3 列のベキ零行列の標準形の問題 (その 1)

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(= \left(J_3(0) \right) \right) \quad (51)$$

となるような正則行列 P が見つかったと仮定してみます. すると, これまで何度も見てきたように, P が正則行列であるという条件のもとで,

(51) 式の書き直し

$$\begin{aligned} P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\iff NP = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff N \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} Np_1 = 0 \\ Np_2 = p_1 \\ Np_3 = p_2 \end{cases} \end{aligned}$$

と読み直すことができますから, (51) 式を満たすような正則行列 P を見つける問題は,

$$p_3 \xrightarrow{N} p_2 = Np_3 \xrightarrow{N} p_1 = Np_2 \xrightarrow{N} 0 \quad (52)$$

というように, 行列 N を掛け算することによって繋がっている一連のベクトルを見つける問題であると解釈できることが分かります.

次に,

3 行 3 列のベキ零行列の標準形の問題 (その 2)

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(= \begin{pmatrix} J_2(0) & 0 \\ 0 & J_1(0) \end{pmatrix} \right) \quad (53)$$

となるような正則行列 P が見つかったと仮定してみます. すると, 同様にして, P が正則行列であるという条件のもとで,

(53) 式の書き直し

$$\begin{aligned}
 P^{-1}NP &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff NP = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff N \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} N\mathbf{p}_1 = 0 \\ N\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \\ N\mathbf{p}_3 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

と読み直すことができますから, (53) 式を満たすような正則行列 P を見つける問題は,

$$\begin{cases} \mathbf{p}_2 \xrightarrow{N\cdot} \mathbf{p}_1 = N\mathbf{p}_2 \xrightarrow{N\cdot} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_3 \xrightarrow{N\cdot} \mathbf{0} \end{cases} \quad (54)$$

というように, 行列 N を掛け算することによって繋がっている一連のベクトルを二組見つける問題であると解釈できることが分かります.

このように, 3 行 3 列のベキ零行列 N を「見やすい形」に変換するという問題は, (52) 式, あるいは, (54) 式のように, 行列 N を掛け算することによって繋がっているようなベクトル達を何組か見つけるという問題として解釈できることが分かります. また, ひとつ繋がりベクトルの組が, それぞれ, ひとつの Jordan 細胞に対応することも分かります. そこで, これらの点に注意して, 「3 行 3 列のベキ零行列 N に対する標準形の問題」を考えてみることにします.

いま, N はベキ零行列なので, 定義によって,

$$N^{m_0} = O$$

となるような自然数 $m_0 \in \mathbb{N}$ が存在することになります. このことは,

$$I_N = \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(N) = O\}$$

として,

$$x^{m_0} \in I_N$$

ということを意味しますから, N の最小多項式 $\psi_N(x)$ は x^{m_0} を割り切らなければならないということが分かります. したがって, $\psi_N(x)$ は, $n \in \mathbb{N}$ として,

$$\psi_N(x) = x^n$$

という形であることが分かります. また, 第 11 回の問 2 のところで見たとように, 最小多項式 $\psi_N(x)$ は特性多項式 $\varphi_N(x)$ を割り切りますから, 特に, 最小多項式の次数は特性多項式

の次数よりは大きくなれないことが分かります.¹⁶ 以上から, 行列 N の最小多項式 $\psi_N(x)$ は,

$$\psi_N(x) = x, x^2, x^3$$

のうちのいずれかになることが分かります. このうち, $\psi_N(x) = x$ の場合には,

$$\begin{aligned} N &= \psi_N(N) \\ &= O \end{aligned}$$

となりますから, N は零行列となることが分かります. したがって, \mathbb{C}^3 のどのような基底を選んでも, 行列 N は零行列という「見やすい形」になりますから, 「標準形の問題」は解決していることとなります. そこで, 以下では, $\psi_N(x) = x^2, x^3$ の場合を考えてみることにします.

まず, $\psi_N(x) = x^3$ となる場合を考えてみます. このとき,

$$N^2 \neq O, N^3 = O$$

となりますから,

$$N^2 \mathbf{u}_0 \neq \mathbf{0}$$

となるようベクトル $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{C}^3$ を, 勝手にひとつ取ってくると, 問 2 と同様に,

$$\mathbf{u}_i = N^i \mathbf{u}_0, \quad (i = 0, 1, 2)$$

として,

$$\mathbf{u}_0 \xrightarrow{N} \mathbf{u}_1 = N\mathbf{u}_0 \xrightarrow{N} \mathbf{u}_2 = N\mathbf{u}_1 \xrightarrow{N} \mathbf{0} \quad (55)$$

となるような一連のベクトルが見つかることとなります. このとき, 問 2 の結果から, $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ は \mathbb{C}^3 の基底になることに注意して, (55) 式を (52) 式と比べると,

$$\begin{cases} \mathbf{p}_1 = \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{p}_2 = \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{p}_3 = \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad (56)$$

とすることで,

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となることが分かります. したがって, (56) 式で与えられる \mathbb{C}^3 の基底 $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ を取ることによって「標準形の問題」は解決することが分かります.

次に, $\psi_N(x) = x^2$ となる場合を考えてみます. このとき,

$$N \neq O, N^2 = O$$

¹⁶いまの場合, N は 3 行 3 列のベキ零行列であると仮定していましたから, その特性多項式 $\varphi_N(x)$ の次数は 3 です.

となりますから、前と同様に、

$$N\mathbf{u}_0 \neq \mathbf{0}$$

となるようベクトル $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{C}^3$ を、勝手にひとつ取ってくると、

$$\mathbf{u}_i = N^i \mathbf{u}_0, \quad (i = 0, 1)$$

として、

$$\mathbf{u}_0 \xrightarrow{N} \mathbf{u}_1 = N\mathbf{u}_0 \xrightarrow{N} \mathbf{0} \quad (57)$$

となるような一組のベクトルが見つかることになります。¹⁷ また、問2の結果から、 $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1\}$ は線型独立となることが分かりますから、後は、 $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ が \mathbb{C}^3 の基底になるように、

$$N\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \quad (58)$$

となるようなベクトル $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{C}^3$ をもうひとつ選ぶことができれば、(54) 式、(57) 式、(58) 式から、

$$\begin{cases} \mathbf{p}_1 = \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{p}_2 = \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{p}_3 = \mathbf{u}_2 \end{cases} \quad (59)$$

として、

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となることが分かります。したがって、(59) 式で与えられる \mathbb{C}^3 の基底 $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ を取ることで「標準形の問題」は解決することが分かります。

そこで、(58) 式を満たすようなベクトル $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{C}^3$ をもうひとつ選んで、 $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ が \mathbb{C}^3 の基底になるようにできるかどうかということを考えてみることにします。いま、仮に、このようなベクトルを選ぶことができたとします。このとき、 \mathbb{C}^3 の勝手なベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ を、 $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ として、

$$\mathbf{v} = c_0\mathbf{u}_0 + c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2$$

というように表わすと、(57) 式、(58) 式から、

$$\begin{aligned} N\mathbf{v} &= N(c_0\mathbf{u}_0 + c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2) \\ &= c_0N\mathbf{u}_0 + c_1N\mathbf{u}_1 + c_2N\mathbf{u}_2 \\ &= c_0\mathbf{u}_1 + c_1\mathbf{0} + c_2\mathbf{0} && ((57) \text{ 式}, (58) \text{ 式から}) \\ &= c_0\mathbf{u}_1 \end{aligned} \quad (60)$$

となることが分かります。よって、 $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$ であることに注意すると、(60) 式から、

$$N\mathbf{v} = \mathbf{0} \iff c_0 = 0$$

¹⁷いまの場合、 $N^2 = O$ となりますから、(55) 式のような一連のベクトルは存在しないことが分かります。

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned}\text{Ker } N &= \{c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 \in \mathbb{C}^3 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{C}\} \\ &= \mathbb{C} \mathbf{u}_1 \oplus \mathbb{C} \mathbf{u}_2\end{aligned}$$

となることが分かります. したがって,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } N = 2 \tag{61}$$

でなければならないことが分かりますが, まず, (61) 式が成り立っていることを確かめてみることにします.

第8回の問3のところで見たとおり, 一般に, 線型空間 V, W の間の線型写像

$$L: V \rightarrow W$$

に対して,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } L + \dim_{\mathbb{C}} \text{Im } L = \dim_{\mathbb{C}} V$$

となることが分かりますから, 我々の場合,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } N + \dim_{\mathbb{C}} \text{Im } N = 3 \tag{62}$$

という式が成り立つことに注意します. いま, $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 \in \mathbb{C}^3$ の定め方から,

$$\begin{aligned}\mathbb{C} \mathbf{u}_1 &\subset \text{Ker } N, \\ \mathbb{C} \mathbf{u}_1 &\subset \text{Im } N\end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned}1 &\leq \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } N, \\ 1 &\leq \dim_{\mathbb{C}} \text{Im } N\end{aligned}$$

となることが分かります. したがって, (62) 式と合わせて考えると, $\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } N, \dim_{\mathbb{C}} \text{Im } N$ の可能性は,

(イ) $\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } N = 1, \dim_{\mathbb{C}} \text{Im } N = 2$

(ロ) $\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } N = 2, \dim_{\mathbb{C}} \text{Im } N = 1$

という二通りの可能性しかないことが分かります.

そこで, いま, (イ) という式が成り立つと仮定してみます. このとき,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Im } N = 2$$

となりますから, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}'_1\}$ が $\text{Im } N$ の基底になるように, $\mathbf{u}'_1 \in \text{Im } N$ を取ることができることが分かります. そこで, さらに,

$$N \mathbf{u}'_0 = \mathbf{u}'_1$$

となるようなベクトル $\mathbf{u}'_0 \in \mathbb{C}^3$ を, 勝手にひとつ取ってくると,

$$\mathbf{u}'_0 \xrightarrow{N} \mathbf{u}'_1 = N\mathbf{u}'_0 \xrightarrow{N} \mathbf{0} \quad (63)$$

となるようなベクトルがもう一組見つかることになります. このとき, 問2の議論と同様にして, $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}'_0, \mathbf{u}'_1\}$ が線型独立となることが, 次のようにして分かります.

そのためには, $c_0, c_1, c'_0, c'_1 \in \mathbb{C}$ として,

$$c_0\mathbf{u}_0 + c_1\mathbf{u}_1 + c'_0\mathbf{u}'_0 + c'_1\mathbf{u}'_1 = \mathbf{0} \implies c_0 = c_1 = c'_0 = c'_1 = 0 \quad (64)$$

となることが分かればよいということになります. そこで, いま,

$$c_0\mathbf{u}_0 + c_1\mathbf{u}_1 + c'_0\mathbf{u}'_0 + c'_1\mathbf{u}'_1 = \mathbf{0} \quad (65)$$

と仮定してみます. このとき, (57) 式, (63) 式に注意して, (65) 式の両辺に N を施してみると,

$$c_0\mathbf{u}_1 + c'_0\mathbf{u}'_1 = \mathbf{0} \quad (66)$$

となることが分かります. すると, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}'_1\}$ は $\text{Im } N$ の基底になるように選んだのですから, (66) 式から,

$$c_0 = c'_0 = 0 \quad (67)$$

となることが分かります. したがって, (65) 式, (67) 式から,

$$c_1\mathbf{u}_1 + c'_1\mathbf{u}'_1 = \mathbf{0}$$

となることが分かりますが, 同じ理由によって,

$$c_1 = c'_1 = 0$$

となることが分かります. よって, (64) 式が成り立つことが分かりました.

以上から, $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}'_0, \mathbf{u}'_1\}$ が線型独立となることが分かりましたが, これは,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^3 = 3$$

となることと矛盾してしまいます. したがって, (イ) という可能性は起こり得ないということが分かります. よって, (ロ) という可能性だけが起こり, 特に,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } N = 2$$

となることが分かりました.

そこで, いま, (57) 式により与えられるベクトル \mathbf{u}_1 に対して, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ が $\text{Ker } N$ の基底になるように, $\mathbf{u}_2 \in \text{Ker } N$ を, 勝手にひとつ取ってくることにします. すると, (57) 式, (58) 式を満たすようなベクトルの組が定まることにはなりますが, 上の議論と同様にして, $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ が \mathbb{C}^3 の基底となることが, 次のようにして分かります. そのためには, $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ として,

$$c_0\mathbf{u}_0 + c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \implies c_0 = c_1 = c_2 = 0 \quad (68)$$

となることが分かればよいということになります。そこで、いま、

$$c_0 \mathbf{u}_0 + c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \quad (69)$$

と仮定してみます。このとき、(57) 式、(58) 式に注意して、(69) 式の両辺に N を施してみると、

$$c_0 \mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \quad (70)$$

となることが分かります。したがって、 $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$ であることに注意すると、(70) 式から、

$$c_0 = 0 \quad (71)$$

となることが分かります。すると、(69) 式、(71) 式から、

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$$

となることが分かりますが、 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ は $\text{Ker } N$ の基底になるように選んだのですから、

$$c_1 = c_2 = 0$$

となることが分かります。以上から、 $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ が \mathbb{C}^3 の基底となることが分かりましたから、上で見たように、(59) 式のように、 $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ を定めることで、「標準形の問題」が解決することが分かります。

ここでは、一般のサイズのベキ零行列を扱うときの議論がイメージしやすいように、上のような形で議論しましたが、(イ) という可能性が起こらないということを示すだけであれば、次のように議論することもできます。いま、

$$N^2 = O$$

となることに注目すると、

$$\text{Im } N \subset \text{Ker } N$$

となることが分かります。¹⁸ したがって、

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Im } N \leq \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } N$$

となることが分かりますから、(イ) という可能性は起こらないことが分かります。

以上より、 N が 3 行 3 列のベキ零行列の場合には、 N の最小多項式 $\psi_N(x)$ が、

$$\psi_N(x) = x, x^2, x^3$$

のうちのどれになるのかということに応じて、それぞれ、

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるような正則行列 P が存在することが分かりました。ここでは、 N が 3 行 3 列のベキ零行列の場合を考えましたが、興味のある方は、上の議論を参考にして、 N が 4 行 4 列のベキ零行列である場合に「Jordan 標準形の存在」を議論してみてください。¹⁹

¹⁸皆さん、確かめてみて下さい。

¹⁹それにより、8 節で見るとような一般のサイズのベキ零行列に対する議論が、より良く理解できるようになるのではないかと思います。

8 ベキ零行列の標準形について (一般のサイズの場合)*

さて, 7 節では, 3 行 3 列のベキ零行列に対して, 「Jordan 標準形の存在の問題」を考えてみましたが, そこでの議論を参考にして, ここでは, 一般のサイズのベキ零行列に対して, 「Jordan 標準形の存在の問題」を考えてみることにします.

そこで, いま, $n \in \mathbb{N}$ を勝手な自然数として, n 行 n 列のベキ零行列 N が勝手にひとつ与えられているとします. このとき, 行列 N を掛け算することにより定まる線型写像

$$L_N : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

が「見やすい形」で表現されるような \mathbb{C}^n の「上手い基底」を見つけることができるかどうかということを考えてみることにします. ベキ零行列 N が零行列である場合には, \mathbb{C}^n の基底としてどのようなものを選んできても, 線型写像 L_N は零行列で表現されることになりますから, 「標準形の問題」は最初から解決されていることとなります. そこで, 以下では, N は零行列ではないベキ零行列であると仮定して話を進めることにします.

さて, 7 節での議論を見返すと, 例えば,

$$\mathbf{u}_0 \xrightarrow{N} \mathbf{u}_1 = N\mathbf{u}_0 \xrightarrow{N} \mathbf{u}_2 = N\mathbf{u}_1 \xrightarrow{N} \mathbf{0}$$

や,

$$\mathbf{u}_0 \xrightarrow{N} \mathbf{u}_1 = N\mathbf{u}_0 \xrightarrow{N} \mathbf{0}$$

というように, 行列 N を掛け算することによって繋がった一連のベクトルを見つけることが, このような「上手い基底」の存在を示すためのポイントになっていることが分かります. 実際, $m \in \mathbb{N}$ を勝手な自然数として,

行列 N を掛け算することによって繋がった一連のベクトル

$$\mathbf{u}_0 \xrightarrow{N} \mathbf{u}_1 = N\mathbf{u}_0 \xrightarrow{N} \mathbf{u}_2 = N\mathbf{u}_1 \xrightarrow{N} \dots \xrightarrow{N} \mathbf{u}_m = N\mathbf{u}_{m-1} \xrightarrow{N} \mathbf{0} \quad (72)$$

となるような一連のベクトルが見つかったとすると,

(72) 式の行列を用いた表現

$$\begin{pmatrix} N\mathbf{u}_0 & N\mathbf{u}_1 & \dots & N\mathbf{u}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_m \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{m+1 \text{ コ}} \quad (73)$$

と表わせることが分かります. さらに, 問 2 の結果から, $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ は線型独立になることが分かりますから, (73) 式より, 線型写像 L_N は, これらのベクトルの生成する線型部分空間

$$\mathbb{C}\mathbf{u}_0 \oplus \mathbb{C}\mathbf{u}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\mathbf{u}_m \subset \mathbb{C}^n \quad (74)$$

上で,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{m+1 \text{ 行}}$$

という行列で表現されることが分かります. ここで, 気になる方は, さらに,

$$\begin{cases} \mathbf{p}_0 = \mathbf{u}_m \\ \mathbf{p}_1 = \mathbf{u}_{m-1} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_m = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

というように名前を付け替えると, (73) 式は,

$$\left(N\mathbf{p}_0 \quad N\mathbf{p}_1 \quad \cdots \quad N\mathbf{p}_m \right) = \left(\mathbf{p}_0 \quad \mathbf{p}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_m \right) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{m+1 \text{ 行}}$$

というように表わすことができますから, 線型写像 L_N は, (74) 式で与えられる線型部分空間上で, $\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m\}$ という基底に関して,

$$J_{m+1}(0) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{m+1 \text{ 行}}$$

というひとつの Jordan 細胞の形で表現されることが分かります. したがって, (72) 式のように N を掛け算することによって繋がった一連のベクトルを何組か見つけ, それらのベクトルをすべて集めてくることで, \mathbb{C}^n の基底を定めることができれば, これらの基底に関して, 線型写像 L_N は Jordan 標準形で表現されることが分かりますから, 「ベキ零行列に対する Jordan 標準形の存在」の問題は解決されることが分かります.

以下では, 議論を直観的に見やすくするために,

$$\mathbf{u}_0 \xrightarrow{N} \mathbf{u}_1 \xrightarrow{N} \mathbf{u}_2 \xrightarrow{N} \cdots \xrightarrow{N} \mathbf{u}_m \xrightarrow{N} \mathbf{0} \quad (75)$$

というように、行列 N を掛け算することによって繋がった一連のベクトルを、

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \cdots & \mathbf{u}_m \\ \hline \end{array} \quad (76)$$

というようにひと繋りの「箱」を用いて表わすことにします。あるいは、それぞれの「箱」に対応するベクトルを、わざわざ書き表わさない方が議論のポイントが分かりやすいと思われる場合には、単に、

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & \cdots & \cdots & \\ \hline \end{array}$$

というように、ひと繋りの「箱」のみを表わすことにします。すると、「ベキ零行列に対する Jordan 標準形の存在」という問題を解決するためには、

ベキ零行列に対する「標準形の問題」を解決する方針

- (イ) (76) 式のようなひと繋りの「箱」が何組か作れる。
- (ロ) 「箱」に対応するベクトル全体を集めてくると、 \mathbb{C}^n の基底となる。

という二つの点が確かめられればよいということになります。

そこで、まず、(76) 式のようなひと繋りの「箱」を作るためにはどうしたらよいのかということを考えてみることにします。いま、(75) 式のように、行列 N を掛け算することによって繋がった一連のベクトルが見つかったとすると、それぞれのベクトルは、 \mathbf{u}_0 を用いて、

$$\mathbf{u}_k = N^k \mathbf{u}_0, \quad (k = 0, 1, \dots, m)$$

というように表わせることが分かります。特に、

$$\text{Im } N^m \ni N^m \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_m \neq \mathbf{0}$$

となりますから、

$$\text{Im } N^m \neq \{\mathbf{0}\} \quad (77)$$

でなければならないことが分かります。

逆に、

$$\text{Im } N^m \neq \{\mathbf{0}\}$$

であるとすると、

$$\mathbf{0} \neq \mathbf{u}_m \in \text{Im } N^m$$

となるようなベクトル \mathbf{u}_m と、

$$\mathbf{u}_m = N^m \mathbf{u}_0$$

となるようなベクトル $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{C}^n$ を、勝手にひとつ取ってきて、

$$\mathbf{u}_k = N^k \mathbf{u}_0, \quad (k = 0, 1, \dots, m)$$

と定めることで,

$$\mathbf{u}_0 \xrightarrow{N} \mathbf{u}_1 \xrightarrow{N} \mathbf{u}_2 \xrightarrow{N} \cdots \xrightarrow{N} \mathbf{u}_m$$

となるような一連のベクトルが得られることが分かります. 以上から, (75) 式のような一連のベクトルの存在を議論する上で, $\text{Im } N^m$ という線型部分空間に注目して考えてみると都合が良さそうなことが分かります.

そこで, $\text{Im } N^m$ という線型部分空間に注目してみることにします. いま,

$$\mathbf{u} \in \text{Im } N^m$$

であるとすると, $\text{Im } N^m$ の定義によって,

$$\mathbf{u} = N^m \mathbf{v}$$

となるようなベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ が存在することになります. すると, \mathbf{u} は,

$$\mathbf{u} = N^{m-1}(N\mathbf{v})$$

というように表わすこともできますから,

$$\mathbf{u} \in \text{Im } N^{m-1}$$

となることが分かります. すなわち, 勝手な自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\text{Im } N^m \subset \text{Im } N^{m-1}$$

となることが分かります. したがって, これらの線型部分空間たちは,

$\text{Im } N^m$ たちは, 線型空間 \mathbb{C}^n の減少する線型部分空間列をなす

$$\mathbb{C}^n = \text{Im } N^0 \supset \text{Im } N^1 \supset \text{Im } N^2 \supset \cdots \quad (78)$$

というような減少列をなすことが分かります.²⁰

また, N はベキ零行列ですから, 7 節の議論と同様にして, N の最小多項式 $\psi_N(x)$ は, $n_0 \leq n$ となるような適当な自然数 $n_0 \in \mathbb{N}$ を用いて,

$$\psi_N(x) = x^{n_0}$$

というように表わせることが分かります.²¹ さらに, N は零行列ではないと仮定していましたが, $n_0 \geq 2$ となることに注意します. そこで, 以下の議論において, 記号の添え字を見やすくするために, $n_0 = m_0 + 1$ と書き直すことにします. すなわち, ベキ零行列 N の最小多項式を,

ベキ零行列 N の最小多項式 (m_0 の定義)

$$\psi_N(x) = x^{m_0+1}$$

と表わすことにします. このことは,

$$N^{m_0} \neq O, N^{m_0+1} = O$$

²⁰一般に, 正方行列 A に対して, $A^0 = I$ と定めます.

²¹皆さん, 7 節の議論を参考にして, 確かめてみて下さい.

となるということを意味していますから, (78) 式の減少列は,

(78) 式の減少列は $\text{Im } N^{m_0+1}$ のところで $\{0\}$ となる

$$\mathbb{C}^n = \text{Im } N^0 \supset \text{Im } N^1 \supset \text{Im } N^2 \supset \cdots \supset \text{Im } N^{m_0} \supsetneq \text{Im } N^{m_0+1} = \{0\} \quad (79)$$

というように, $\text{Im } N^{m_0+1}$ より先では, $\{0\}$ となることが分かります. 特に, (77) 式から, (75) 式のような行列 N を掛け算することによって繋がった一連のベクトルは, $m \leq m_0$ に対してのみ存在することが分かります. そこで, \mathbb{C}^n の「上手い基底」を見つけるに当たって, (79) 式の減少列に注目しながら, (75) 式のような行列 N を掛け算することによって繋がった一連のベクトルのうち, なるべく長さの長いもの, すなわち, なるべく m の大きいものから順番に \mathbb{C}^n の基底の候補を見つけてゆくということが, 以下の議論でのアイデアになります.

そこで, まず, 長さが $(m_0 + 1)$ のひと繋がりの「箱」のうち, 「箱」に対応するベクトルを集めたものが線型独立となるようなものを, なるべくたくさん見つけることを考えてみます. そのために,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Im } N^{m_0} = d_{m_0}$$

として, $\text{Im } N^{m_0}$ の基底 $\{\mathbf{u}_{m_0}^{(1)}, \mathbf{u}_{m_0}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_0}^{(d_{m_0})}\}$ を勝手にひとつ取ってきて,

$$\mathbf{u}_{m_0}^{(l)} = N^{m_0} \mathbf{u}_0^{(l)}, \quad (l = 1, 2, \dots, d_{m_0})$$

となるようなベクトル $\mathbf{u}_0^{(1)}, \mathbf{u}_0^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_0^{(d_{m_0})} \in \mathbb{C}^n$ を, それぞれ, 勝手にひとつずつ取ってくることにします. すると,

$$\mathbf{u}_k^{(l)} = N^k \mathbf{u}_0^{(l)}, \quad (k = 0, 1, \dots, m_0, l = 1, 2, \dots, d_{m_0}) \quad (80)$$

と定めることで,

行列 N を掛け算することで繋がった一連のベクトルのうち長さが最大のもの

$$\mathbf{u}_0 \xrightarrow{N} \mathbf{u}_1 \xrightarrow{N} \mathbf{u}_2 \xrightarrow{N} \cdots \xrightarrow{N} \mathbf{u}_{m_0} \xrightarrow{N} \mathbf{0} \quad (81)$$

となるような一連のベクトルが d_{m_0} 組得られることになります. すなわち, 長さが $(m_0 + 1)$ のひと繋がりの「箱」が d_{m_0} 組得られることになります.

このとき, これらの「箱」に対応するベクトルをすべて集めてみると,

$$\{\mathbf{u}_k^{(l)}\}_{\substack{k=0,1,\dots,m_0, \\ l=1,2,\dots,d_{m_0}}}$$

は線型独立となることが, 問 2 の議論と同様に, 次のようにして分かります. そのためには, $c_k^{(l)} \in \mathbb{C}$, $(k = 0, 1, \dots, m_0, l = 1, 2, \dots, d_{m_0})$ として,

$$\sum_{l=1}^{d_{m_0}} \sum_{k=0}^{m_0} c_k^{(l)} \mathbf{u}_k^{(l)} = \mathbf{0} \implies c_k^{(l)} = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, m_0, l = 1, 2, \dots, d_{m_0}) \quad (82)$$

となることが分かればよいということになります.

そこで、いま、

$$\sum_{l=1}^{d_{m_0}} \left(c_0^{(l)} \mathbf{u}_0^{(l)} + c_1^{(l)} \mathbf{u}_1^{(l)} + \cdots + c_{m_0}^{(l)} \mathbf{u}_{m_0}^{(l)} \right) = \mathbf{0} \quad (83)$$

と仮定してみます。このとき、(80) 式、(81) 式に注意して、(83) 式の両辺に N^{m_0} を施してみると、

$$\sum_{l=1}^{d_{m_0}} c_0^{(l)} \mathbf{u}_{m_0}^{(l)} = \mathbf{0} \quad (84)$$

となることが分かります。すると、 $\{\mathbf{u}_{m_0}^{(1)}, \mathbf{u}_{m_0}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_0}^{(d_{m_0})}\}$ は $\text{Im } N^{m_0}$ の基底になるように選んだのですから、(84) 式から、

$$c_0^{(l)} = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, d_{m_0}) \quad (85)$$

となることが分かります。したがって、(83) 式、(85) 式から、

$$\sum_{l=1}^{d_{m_0}} \left(c_1^{(l)} \mathbf{u}_1^{(l)} + c_2^{(l)} \mathbf{u}_2^{(l)} + \cdots + c_{m_0}^{(l)} \mathbf{u}_{m_0}^{(l)} \right) = \mathbf{0} \quad (86)$$

となることが分かりますが、(86) 式の両辺に N^{m_0-1} を施すと、

$$\sum_{l=1}^{d_{m_0}} c_1^{(l)} \mathbf{u}_{m_0}^{(l)} = \mathbf{0}$$

となることが分かります。よって、同じ理由で、

$$c_1^{(l)} = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, d_{m_0})$$

となることが分かります。以下、同様の議論を繰り返すと、結局、

$$c_k^{(l)} = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, m_0, l = 1, 2, \dots, d_{m_0})$$

となることが分かります。²² したがって、(82) 式が成り立つことが分かりましたから、

$$\left\{ \mathbf{u}_k^{(l)} \right\}_{\substack{k=0,1,\dots,m_0, \\ l=1,2,\dots,d_{m_0}}}$$

は線型独立となることが分かりました。

逆に、(81) 式のような行列 N を掛け算することによって繋がっている長さ $(m_0 + 1)$ の一連のベクトルの組が d 組見つかって、

$$\left\{ \mathbf{u}_k^{(l)} \right\}_{\substack{k=0,1,\dots,m_0, \\ l=1,2,\dots,d}}$$

が線型独立になると仮定してみます。すると、少なくとも、これらのベクトルの一部である

$$\left\{ \mathbf{u}_{m_0}^{(l)} \right\}_{l=1,2,\dots,d} \subset \text{Im } N^{m_0}$$

²² 皆さん、確かめてみて下さい。数学的帰納法を用いると、スッキリと議論することができます。

は線型独立でなければならないことが分かりますから、

$$d \leq d_{m_0}$$

となることが分かります。この意味で、(81) 式のような関係にある一連のベクトルの「独立な組」の数は、上のように d_{m_0} 組を選んだ場合が最大であることが分かります。

そこで、後で、数学的帰納法を用いた議論に持ち込むために、これら d_{m_0} 組の長さが $(m_0 + 1)$ のひと繋ぎの「箱」について、それぞれの「箱」に対応するベクトルが、(79) 式の線型部分空間列に関して、どの線型部分空間に属するベクトルになるのかということを考えてみることにします。以下の議論では、いらない混乱をしないように、 $\mathbf{u}_k^{(l)}$ の添え字「 (l) 」を省いて、(81) 式のような関係にある一連のベクトルの一組に対して、その性質を調べてみることにします。すなわち、(81) 式のような関係にある一連のベクトルが一組与えられているとして、これらのベクトルが、(79) 式に現われる線型部分空間のうち、どの線型部分空間に属するベクトルであるのかということを考えてみることにします。

いま、(81) 式から、 $k = 1, 2, \dots, m_0$ に対して、 \mathbf{u}_k は、

$$\mathbf{u}_k = N^k \mathbf{u}_0 \quad (87)$$

と表わせることが分かりますから、

$$\mathbf{u}_k \in \text{Im } N^k$$

となることが分かります。したがって、(78) 式と合わせて考えると、より一般に、 $k' \leq k$ となる勝手な自然数 $k' \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\mathbf{u}_k \in \text{Im } N^{k'} \quad (88)$$

となることが分かります。

次に、

$$\mathbf{u}_k \in \text{Im } N^{k+1}$$

と仮定してみます。すると、 \mathbf{u}_k は、適当なベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ を用いて、

$$\mathbf{u}_k = N^{k+1} \mathbf{v} \quad (89)$$

というように表わすことができるということになります。このとき、 \mathbf{u}_{m_0} は、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{m_0} &= N^{m_0} \mathbf{u}_0 \\ &= N^{m_0-k} (N^k \mathbf{u}_0) \\ &= N^{m_0-k} \mathbf{u}_k && ((87) \text{ 式から}) \\ &= N^{m_0-k} (N^{k+1} \mathbf{v}) && ((89) \text{ 式から}) \\ &= N^{m_0+1} \mathbf{v} \end{aligned} \quad (90)$$

と表わせることになりませんが、 N の最小多項式は、

$$\psi_N(x) = x^{m_0+1}$$

であったことに注意すると, (90) 式から,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{m_0} &= N^{m_0+1}\mathbf{v} \\ &= O\mathbf{v} \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

となることが分かります.²³ ところが, これは,

$$\mathbf{u}_{m_0} \neq \mathbf{0}$$

であったことと矛盾しますから, 最初の仮定が間違っていたことが分かります. すなわち,

$$\mathbf{u}_k \notin \text{Im } N^{k+1} \quad (91)$$

となることが分かります.

以上より, (81) 式のような関係にある一連のベクトル $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{m_0}\}$ を勝手に一組取ってくると, (88) 式, (91) 式から, それぞれのベクトル \mathbf{u}_k , ($k = 0, 1, \dots, m_0$) は,

$$\begin{cases} \mathbf{u}_k \in \text{Im } N^{k'}, & (k' \leq k \text{ のとき}) \\ \mathbf{u}_k \notin \text{Im } N^{k'}, & (k' > k \text{ のとき}) \end{cases}$$

となることが分かりました. 我々の場合には, このような一連のベクトルが d_{m_0} 組あり, 長さが $(m_0 + 1)$ のひと繋がり「箱」が d_{m_0} 組できていましたから, それぞれの「箱」に対応する $(m_0 + 1) \cdot d_{m_0}$ 個のベクトル

$$\{\mathbf{u}_k^{(l)}\}_{\substack{k=0,1,\dots,m_0, \\ l=1,2,\dots,d_{m_0}}}$$

たちは, 図 1 のような状況にあることが分かります.

また, 上で見たように, これらのベクトルたちは線型独立でしたから, 図 1 より, $k = 1, 2, \dots, m_0$ に対して,

$$\text{Im } N^k \oplus \mathbb{C}\mathbf{u}_{k-1}^{(1)} \oplus \mathbb{C}\mathbf{u}_{k-1}^{(2)} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\mathbf{u}_{k-1}^{(d_{m_0})} \subset \text{Im } N^{k-1} \quad (92)$$

となることが分かります. 特に,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Im } N^k + d_{m_0} \leq \dim_{\mathbb{C}} \text{Im } N^{k-1}, \quad (k = 1, 2, \dots, m_0)$$

²³以上の議論は式で表わすと分かりにくいかもしれませんが, 「絵」で表わせば,

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{u}_0 & \xrightarrow{N \cdot} & \mathbf{u}_1 & \xrightarrow{N \cdot} & \dots & \xrightarrow{N \cdot} & \mathbf{u}_k & \xrightarrow{N \cdot} & \mathbf{u}_{k+1} & \xrightarrow{N \cdot} & \dots & \xrightarrow{N \cdot} & \mathbf{u}_{m_0} \\ & & & & & & \parallel & & & & & & \\ & & & & & & N^{k+1}\mathbf{v} & & & & & & \end{array}$$

となることから,

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{u}_0 & \xrightarrow{N \cdot} & \mathbf{u}_1 & \xrightarrow{N \cdot} & \dots & \xrightarrow{N \cdot} & \mathbf{u}_k & \xrightarrow{N \cdot} & \mathbf{u}_{k+1} & \xrightarrow{N \cdot} & \dots & \xrightarrow{N \cdot} & \mathbf{u}_{m_0} \\ & & & & & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ & & & & & & N^{k+1}\mathbf{v} & \xrightarrow{N \cdot} & N^{k+2}\mathbf{v} & \xrightarrow{N \cdot} & \dots & \xrightarrow{N \cdot} & N^{m_0+1}\mathbf{v} = \mathbf{0} \end{array}$$

となることが分かるということです.

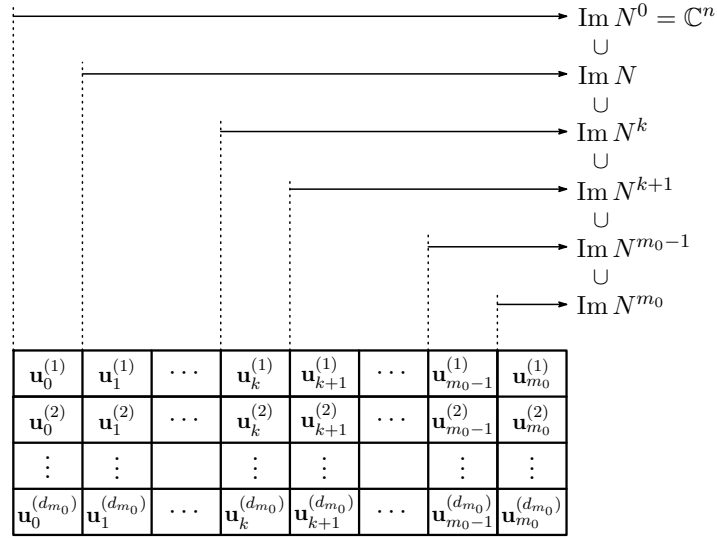


図 1: $k = 0, 1, \dots, m_0, l = 1, 2, \dots, d_{m_0}$ に対して, $\mathbf{u}_k^{(l)}$ は, $\mathbf{u}_k^{(l)} \in \text{Im } N^k \setminus \text{Im } N^{k+1}$ となるようなベクトルである.

となることが分かりますから, $\text{Im } N^{k-1}$ と $\text{Im } N^k$ との間の次元の差は, 常に, d_{m_0} より大きくなることが分かります. よって, (79) 式に現われる包含関係「 \supset 」は, すべて真の包含関係「 \supsetneq 」であることも分かりました.

ここで, (92) 式に現われる包含関係「 \subset 」は, 一般には, 等号「 $=$ 」であるとは限らないということに注意します. このことは,

$$\{\mathbf{u}_k^{(l)}\}_{\substack{k=0,1,\dots,m_0, \\ l=1,2,\dots,d_{m_0}}} \quad (93)$$

というベクトルだけを考えたのでは, 一般には, 数が足りないために, \mathbb{C}^n の基底を定めることができないということを意味しています. そこで,

$$\mathbb{C}^n = \text{Im } N^0 \supset \text{Im } N^1 \supset \text{Im } N^2 \supset \dots \supset \text{Im } N^{m_0-1} \supset \text{Im } N^{m_0} \quad (94)$$

という線型部分空間の列に注目して, (93) 式のベクトルたちに, $(m_0 + 1)$ より長さの短い

$$\mathbf{u}_0 \xrightarrow{N \cdot} \mathbf{u}_1 \xrightarrow{N \cdot} \mathbf{u}_2 \xrightarrow{N \cdot} \dots \xrightarrow{N \cdot} \mathbf{u}_m \xrightarrow{N \cdot} \mathbf{0}, \quad (m < m_0)$$

というような行列 N を掛け算することによって繋がった一連のベクトルを, 「 m の大きい方から順番に何組か付け加えていく」ことを考えるということと, それにより, (94) 式に現われる線型部分空間のうち, 「小さな方から順番に基底を定める」ことを考えるということが, 以下の議論でのアイデアになります.

いま, 図 1 の右端に現われている $\{\mathbf{u}_{m_0}^{(l)}\}_{l=1,2,\dots,d_{m_0}}$ というベクトルたちは, もともと, $\text{Im } N^{m_0}$ の基底として定めたのですから, $\text{Im } N^{m_0}$ に対しては, 図 1 に現われるベクトルだけで, 基底が定まっていることが分かります. 一方, 上で注意したように, 右から二列目までを考えた $\{\mathbf{u}_{m_0-1}^{(l)}, \mathbf{u}_{m_0}^{(l)}\}_{l=1,2,\dots,d_{m_0}}$ は, 線型独立ではありませんが, 一般には, $\text{Im } N^{m_0-1}$ の基底になるとは限りません. そこで, どのようなベクトルを付け加えることで, $\text{Im } N^{m_0-1}$

の基底を定めることができるのかということを考えてみる必要がありますが、そのためのアイデアは「 $\text{Im } N^{m_0-1}$ に属するベクトルに行列 N を掛け算する操作」に注目して、 $\text{Im } N^{m_0-1}$ の様子を調べてみるということです。すなわち、行列 N を掛け算することによって得られる線型写像

$$L_N : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

の定義域を $\text{Im } N^{m_0-1}$ に制限することによって得られる線型写像

$$L_N|_{\text{Im } N^{m_0-1}} : \text{Im } N^{m_0-1} \rightarrow \mathbb{C}^n$$

に注目して、 $\text{Im } N^{m_0-1}$ の様子を調べてみるということです。²⁴

そこで、 $\text{Im } N^{m_0-1}$ の様子を具体的に調べる前に、第 8 回の問 3 のところで、 Ker や Im という概念を用いて、線型写像の「大まかな様子」がどのように理解することができるのかということの説明するために行なった議論のうち、今回の議論で必要となる部分を「線型空間」という立場から見直してみることにします。一般に、線型空間 V, W の間の線型写像

$$L : V \rightarrow W$$

に対して、

$$d = \dim_{\mathbb{C}} \text{Im } L$$

として、 $\text{Im } L$ の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_d\}$ を、勝手にひとつ取ってきます。²⁵ また、

$$L(\tilde{\mathbf{e}}_i) = \mathbf{e}_i, \quad (i = 1, 2, \dots, d) \quad (95)$$

となるような V の元 $\tilde{\mathbf{e}}_i \in V$ を、勝手にひとつずつ選んできて、 $\tilde{\mathbf{e}}_i$ たちが生成する V の部分空間を、

線型空間 V における $\text{Im } L \subset W$ のコピー

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Im } L} &= \mathbb{C}\tilde{\mathbf{e}}_1 + \mathbb{C}\tilde{\mathbf{e}}_2 + \dots + \mathbb{C}\tilde{\mathbf{e}}_d \\ &= \{c_1\tilde{\mathbf{e}}_1 + c_2\tilde{\mathbf{e}}_2 + \dots + c_d\tilde{\mathbf{e}}_d \in V \mid c_1, c_2, \dots, c_d \in \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

²⁴一般に、二つの集合 S, T の間の写像 $f : S \rightarrow T$ と S の部分集合 $S' \subset S$ に対して、写像 f の定義域を S' に制限することによって得られる写像を、

$$f|_{S'} : S' \rightarrow T$$

という記号を用いて表わしたりします。

²⁵後で見るように、我々の場合には、

$$V = \text{Im } N^{m_0-1}, \quad W = \mathbb{C}^n, \quad L = L_N|_{\text{Im } N^{m_0-1}}$$

として、

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_d\} = \{\mathbf{u}_{m_0}^{(1)}, \mathbf{u}_{m_0}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_0}^{(d)}\}$$

となっています。

という記号で表わすことにします.²⁶ いま, $c_1, c_2, \dots, c_d \in \mathbb{C}$ として,

$$\mathbf{0} = c_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + c_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + \dots + c_d \tilde{\mathbf{e}}_d \quad (96)$$

であるとする, (96) 式の両辺に, 線型写像 L を施すことで,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= L(c_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + c_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + \dots + c_d \tilde{\mathbf{e}}_d) \\ &= c_1 L(\tilde{\mathbf{e}}_1) + c_2 L(\tilde{\mathbf{e}}_2) + \dots + c_d L(\tilde{\mathbf{e}}_d) \\ &= c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + \dots + c_d \mathbf{e}_d \end{aligned} \quad ((95) \text{ 式より}) \quad (97)$$

となることが分かります. ここで, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_d\}$ は線型部分空間 $\text{Im } L$ の基底であることに注意すると, (97) 式から,

$$c_1 = c_2 = \dots = c_d = 0$$

となることが分かりますから, $\{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_d\}$ は線型独立となることが分かります. よって, $\{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_d\}$ は線型部分空間 $\widetilde{\text{Im } L}$ の基底になることが分かります.

また, このとき, 線型空間 V は,

線型空間 V の直和分解

$$V = \text{Ker } L \oplus \widetilde{\text{Im } L}$$

というように「 $\text{Ker } L$ の方向」と「 $\widetilde{\text{Im } L}$ の方向」に直和分解されることが, 次のようにして分かります.²⁷ そのためには,

線型空間 V が $\text{Ker } f$ と $\widetilde{\text{Im } f}$ の直和になるための条件

(イ) 勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ に対して,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + c_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + c_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + \dots + c_d \tilde{\mathbf{e}}_d$$

となるような元 $\mathbf{u}_1 \in \text{Ker } L$ と複素数 $c_1, c_2, \dots, c_d \in \mathbb{C}$ が存在する.

(ロ) $\mathbf{u}_1 \in \text{Ker } L, c_1, c_2, \dots, c_d \in \mathbb{C}$ として,

$$\mathbf{0} = \mathbf{u}_1 + c_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + c_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + \dots + c_d \tilde{\mathbf{e}}_d \implies \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}, c_1 = c_2 = \dots = c_d = 0$$

となる.

²⁶我々の場合には,

$$N\mathbf{u}_{m_0-1}^{(i)} = \mathbf{u}_{m_0}^{(i)}, \quad (i = 1, 2, \dots, d)$$

となるので,

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \mathbf{u}_{m_0-1}^{(i)}, \quad (i = 1, 2, \dots, d)$$

と取ることができます.

²⁷第8回の問3のところで, 「線型写像の大まかな性質」を調べるときに, 線型空間 V を「上手い番地割り」のもとで,

$$V \cong \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \oplus \mathbb{R}^{n-r}$$

というように「縦方向」 \mathbb{R}^{n-r} と「横方向」 \mathbb{R}^r に直和分解して考えましたが, $\text{Ker } L, \widetilde{\text{Im } L}$ は, それぞれ, 線型空間 V の「縦方向」, 「横方向」を「番地割り」を通さずに, 「線型空間」の立場から表現したものです.

という二つの条件が満たされることが確かめられればよいということになります。²⁸

そこで、まず、(イ) という条件について考えてみます。そのために、 V の元 $\mathbf{u} \in V$ を、勝手にひとつ取ってきたときに、 \mathbf{u} が、 $\mathbf{u}_1 \in \text{Ker } L$, $c_1, c_2, \dots, c_d \in \mathbb{C}$ として、

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + c_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + c_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + \dots + c_d \tilde{\mathbf{e}}_d \quad (98)$$

という形に表わせるとしたら、 $\mathbf{u}_1 \in \text{Ker } L$ や $c_1, c_2, \dots, c_d \in \mathbb{C}$ は何でなければならないのかということに「当たり」をつけてみることにします。いま、(95) 式と $\mathbf{u}_1 \in \text{Ker } L$ であることに注意して、(98) 式の両辺に線型写像 L を施してみると、

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}) &= L(\mathbf{u}_1 + c_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + c_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + \dots + c_d \tilde{\mathbf{e}}_d) \\ &= L(\mathbf{u}_1) + c_1 L(\tilde{\mathbf{e}}_1) + c_2 L(\tilde{\mathbf{e}}_2) + \dots + c_d L(\tilde{\mathbf{e}}_d) \\ &= \mathbf{0} + c_1 L(\tilde{\mathbf{e}}_1) + c_2 L(\tilde{\mathbf{e}}_2) + \dots + c_d L(\tilde{\mathbf{e}}_d) \quad (\mathbf{u}_1 \in \text{Ker } L \text{ より}) \\ &= c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + \dots + c_d \mathbf{e}_d \quad ((95) \text{ 式より}) \end{aligned} \quad (99)$$

となることが分かります。したがって、(99) 式から、 $\text{Im } L$ の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_d\}$ を用いて、 $L(\mathbf{u})$ を、

$$L(\mathbf{u}) = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + \dots + c_d \mathbf{e}_d \quad (100)$$

と表わすとき、

$$\mathbf{u}_2 = c_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + c_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + \dots + c_d \tilde{\mathbf{e}}_d \quad (101)$$

というように定めなければならないことが分かります。

そこで、いま、与えられた元 $\mathbf{u} \in V$ に対して、(101) 式のように $\mathbf{u}_2 \in \widetilde{\text{Im } L}$ を定めることにします。このとき、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u} - \mathbf{u}_2 \\ &= \mathbf{u} - c_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 - c_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 - \dots - c_d \tilde{\mathbf{e}}_d \end{aligned} \quad (102)$$

と定めると、(95) 式、(100) 式から、

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}_1) &= L(\mathbf{u} - c_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 - c_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 - \dots - c_d \tilde{\mathbf{e}}_d) \\ &= L(\mathbf{u}) - c_1 L(\tilde{\mathbf{e}}_1) - c_2 L(\tilde{\mathbf{e}}_2) - \dots - c_d L(\tilde{\mathbf{e}}_d) \\ &= L(\mathbf{u}) - (c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + \dots + c_d \mathbf{e}_d) \quad ((95) \text{ 式より}) \\ &= \mathbf{0} \quad ((100) \text{ 式より}) \end{aligned}$$

となることが分かりますから、

$$\mathbf{u}_1 \in \text{Ker } L$$

となることが分かります。よって、(101) 式、(102) 式のように、 $\mathbf{u}_1 \in \text{Ker } L$, $\mathbf{u}_2 \in \widetilde{\text{Im } L}$ を定めることで、(イ) という条件が満たされることが分かります。

²⁸議論が見やすくなるように、 $\{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_d\}$ は線型部分空間 $\widetilde{\text{Im } L}$ の基底であることに注意して、最初から、 $\widetilde{\text{Im } L}$ の元 $\mathbf{u}_2 \in \widetilde{\text{Im } L}$ を、

$$\mathbf{u}_2 = c_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + c_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + \dots + c_d \tilde{\mathbf{e}}_d \in \widetilde{\text{Im } L}$$

というように表わすことにしました。

次に、(ロ) という条件について考えてみます。そこで、いま、 $\mathbf{u}_1 \in \text{Ker } L$, $c_1, c_2, \dots, c_d \in \mathbb{C}$ として、

$$\mathbf{0} = \mathbf{u}_1 + c_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + c_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + \dots + c_d \tilde{\mathbf{e}}_d \quad (103)$$

であると仮定してみます。このとき、(103) 式の両辺に線型写像 L を施してみると、

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= L(\mathbf{u}_1 + c_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + c_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + \dots + c_d \tilde{\mathbf{e}}_d) \\ &= L(\mathbf{u}_1) + c_1 L(\tilde{\mathbf{e}}_1) + c_2 L(\tilde{\mathbf{e}}_2) + \dots + c_d L(\tilde{\mathbf{e}}_d) \\ &= \mathbf{0} + c_1 L(\tilde{\mathbf{e}}_1) + c_2 L(\tilde{\mathbf{e}}_2) + \dots + c_d L(\tilde{\mathbf{e}}_d) \quad (\mathbf{u}_1 \in \text{Ker } L \text{ より}) \\ &= c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + \dots + c_d \mathbf{e}_d \quad ((95) \text{ 式より}) \end{aligned}$$

となることが分かりますが、 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_d\}$ は $\text{Im } L$ の基底でしたから、

$$c_1 = c_2 = \dots = c_d = 0 \quad (104)$$

となることが分かります。よって、(103) 式、(104) 式から、

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$$

となることも分かりますから、(ロ) という条件も満たされることが分かりました。

以上より、(イ)、(ロ) という二つの条件が満たされることが分かりましたから、線型空間 V は、

線型空間 V の直和分解

$$V = \text{Ker } L \oplus \widetilde{\text{Im } L} \quad (105)$$

というように、「縦方向」 $\text{Ker } L$ と「横方向」 $\widetilde{\text{Im } L}$ に直和分解できることが分かりました。

そこで、我々の場合に戻って、

$$V = \text{Im } N^{m_0-1}, \quad W = \mathbb{C}^n, \quad L = L_N|_{\text{Im } N^{m_0-1}}$$

として、

$$L_N|_{\text{Im } N^{m_0-1}} : \text{Im } N^{m_0-1} \rightarrow \mathbb{C}^n$$

という線型写像を考えて、(105) 式の直和分解を用いて、線型部分空間 $\text{Im } N^{m_0-1}$ の様子を調べてみることにします。いま、 $\text{Im } N^{m_0-1}$ のベクトル $\mathbf{u} = N^{m_0-1} \mathbf{v} \in \text{Im } N^{m_0-1}$, ($\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$) を、勝手にひとつ取ってきて、 \mathbf{u} に行列 N を施してみると、

$$N\mathbf{u} = N^{m_0} \mathbf{v} \in \text{Im } N^{m_0}$$

となることが分かりますから、

$$\text{Im}(L_N|_{\text{Im } N^{m_0-1}}) \subset \text{Im } N^{m_0} \quad (106)$$

となることが分かります。逆に、 $\text{Im } N^{m_0}$ の勝手なベクトル $N^{m_0} \mathbf{v} \in \text{Im } N^{m_0}$, ($\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$) に対して、

$$\mathbf{u} = N^{m_0-1} \mathbf{v}$$

と定めると,

$$N^{m_0} \mathbf{v} = N \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in \text{Im } N^{m_0-1}$$

と表わすことができますから,

$$\text{Im}(L_N|_{\text{Im } N^{m_0-1}}) \supset \text{Im } N^{m_0} \quad (107)$$

となることが分かります. よって, (106) 式, (107) 式より,

$$\text{Im}(L_N|_{\text{Im } N^{m_0-1}}) = \text{Im } N^{m_0}$$

となることが分かります. すなわち, 我々の場合,

$$\text{Im } L = \text{Im } N^{m_0}$$

となっていることが分かります.

いま, 定義により, $\{\mathbf{u}_{m_0}^{(l)}\}_{l=1,2,\dots,d_{m_0}}$ は, $\text{Im } N^{m_0}$ の基底であるわけですから, $d = d_{m_0}$ で,

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{d_{m_0}}\} = \{\mathbf{u}_{m_0}^{(1)}, \mathbf{u}_{m_0}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_0}^{(d_{m_0})}\}$$

と取れることが分かります. また,

$$N \mathbf{u}_{m_0-1}^{(l)} = \mathbf{u}_{m_0}^{(l)}, \quad (l = 1, 2, \dots, d_{m_0})$$

となっていることに注意すると,

$$\{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_{d_{m_0}}\} = \{\mathbf{u}_{m_0-1}^{(1)}, \mathbf{u}_{m_0-1}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_0-1}^{(d_{m_0})}\}$$

と取れることも分かりますから, 我々の場合,

$$\widetilde{\text{Im } L} = \mathbb{C} \mathbf{u}_{m_0-1}^{(1)} \oplus \mathbb{C} \mathbf{u}_{m_0-1}^{(2)} \oplus \dots \oplus \mathbb{C} \mathbf{u}_{m_0-1}^{(d_{m_0})} \quad (108)$$

と取れることが分かります. よって,

$$\begin{aligned} \text{Ker } L &= \text{Ker}(L_N|_{\text{Im } N^{m_0-1}}) \\ &= \text{Im } N^{m_0-1} \cap \text{Ker } N \end{aligned} \quad (109)$$

となることに注意すると,²⁹ (105) 式, (108) 式, (109) 式から, $\text{Im } N^{m_0-1}$ が,

$$\text{Im } N^{m_0-1} = (\text{Im } N^{m_0-1} \cap \text{Ker } N) \oplus \left(\mathbb{C} \mathbf{u}_{m_0-1}^{(1)} \oplus \mathbb{C} \mathbf{u}_{m_0-1}^{(2)} \oplus \dots \oplus \mathbb{C} \mathbf{u}_{m_0-1}^{(d_{m_0})} \right)$$

というように直和分解できることが分かります. さらに,

$$\mathbf{u}_{m_0}^{(l)} \in \text{Im } N^{m_0-1} \cap \text{Ker } N, \quad (l = 1, 2, \dots, d_{m_0})$$

となることに注意すると, 結局, $\text{Im } N^{m_0-1}$ という線型部分空間や, これまでに定めた $\{\mathbf{u}_{m_0-1}^{(l)}, \mathbf{u}_{m_0}^{(l)}\}_{l=1,2,\dots,d_{m_0}}$ というベクトルたちの様子は, 図2のようになっていることが分か

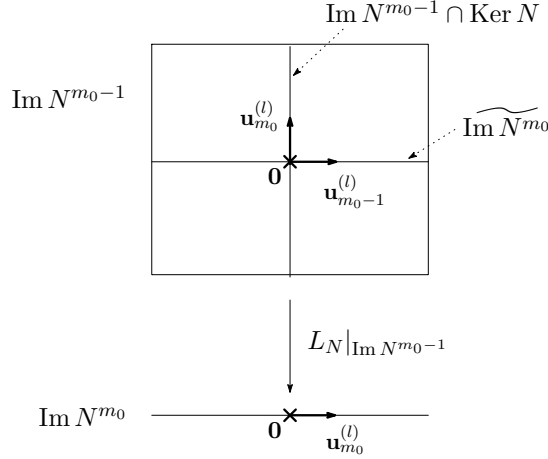


図 2: $L_N|_{\text{Im } N^{m_0-1}}$ という線型写像に注目して考えると, $\text{Im } N^{m_0-1}$ という線型部分空間は, 「縦方向」 $\text{Im } N^{m_0-1} \cap \text{Ker } N$ と, $\{\mathbf{u}_{m_0-1}^{(l)}\}_{l=1,2,\dots,d_{m_0}}$ たちの定める「横方向」 $\widetilde{\text{Im } N^{m_0}}$ に直和分解されることが分かる.

ります. これより, $\{\mathbf{u}_{m_0-1}^{(l)}, \mathbf{u}_{m_0}^{(l)}\}_{l=1,2,\dots,d_{m_0}}$ たちだけでは, 数が足りないために, $\text{Im } N^{m_0-1}$ の基底を定めることができない場合でも, 数が足りない方向は $\text{Im } N^{m_0-1} \cap \text{Ker } N$ という「縦方向」だけなので, $\text{Im } N^{m_0-1} \cap \text{Ker } N$ の元をいくつか付け加えることによって, $\text{Im } N^{m_0-1}$ の基底を定めることができることが分かります.

そこで, いま,

$$\begin{aligned} d_{m_0-1} &= \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(L_N|_{\text{Im } N^{m_0-1}}) \\ &= \dim_{\mathbb{C}}(\text{Im } N^{m_0-1} \cap \text{Ker } N) \end{aligned}$$

として, 必要であれば, $\{\mathbf{u}_{m_0}^{(l)}\}_{l=1,2,\dots,d_{m_0}}$ に, $(d_{m_0-1} - d_{m_0})$ 個のベクトル $\mathbf{u}_{m_0-1}^{(l')}$ を付け加えることで,

$$\{\mathbf{u}_{m_0}^{(l)}, \mathbf{u}_{m_0-1}^{(l')}\}_{\substack{l=1,2,\dots,d_{m_0}, \\ l'=d_{m_0}+1,\dots,d_{m_0-1}}}$$

が $\text{Im } N^{m_0-1} \cap \text{Ker } N$ の基底になるように, $\{\mathbf{u}_{m_0-1}^{(l')}\}_{l'=d_{m_0}+1,\dots,d_{m_0-1}}$ を定めることにします. このとき, 前と同様に, $l' = d_{m_0} + 1, \dots, d_{m_0-1}$ に対して,

$$\mathbf{u}_{m_0-1}^{(l')} = N^{m_0-1} \mathbf{u}_0^{(l')}$$

となるようなベクトル $\mathbf{u}_0^{(d_{m_0}+1)}, \dots, \mathbf{u}_0^{(d_{m_0-1})} \in \mathbb{C}^n$ を勝手にひとつずつ取ってきて,

$$\mathbf{u}_k^{(l')} = N^k \mathbf{u}_0^{(l')}, \quad (k = 0, 1, \dots, m_0 - 1)$$

と定めると, これらは,

$$\mathbf{u}_0 \xrightarrow{N \cdot} \mathbf{u}_1 \xrightarrow{N \cdot} \mathbf{u}_2 \xrightarrow{N \cdot} \dots \xrightarrow{N \cdot} \mathbf{u}_{m_0-1} \xrightarrow{N \cdot} \mathbf{0}$$

²⁹すなわち, 「 $\text{Ker}(L_N|_{\text{Im } N^{m_0-1}})$ に属するベクトルとは, $\text{Im } N^{m_0-1}$ に属するベクトルのうち, 行列 N を掛け算すると $\mathbf{0}$ となるベクトルのことですね」ということです.

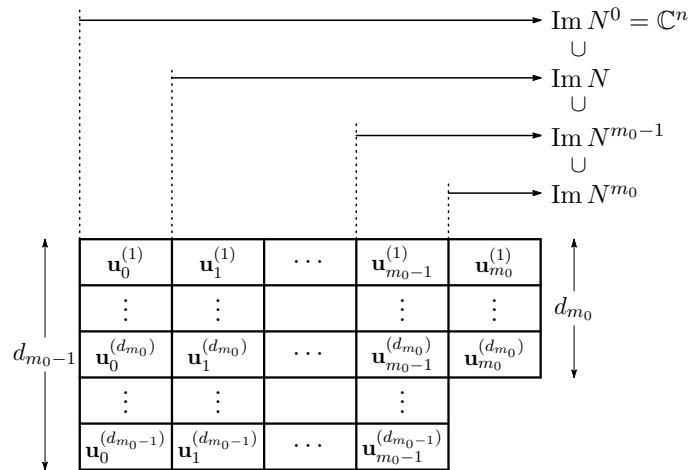


図 3: 必要なら, さらに, 長さ m_0 の一連のベクトルを $(d_{m_0-1} - d_{m_0})$ 組付け加えることで, $\text{Im } N^{m_0-1}$ の基底を定めることができる.

という関係にある長さ m_0 の一連のベクトルを $(d_{m_0-1} - d_{m_0})$ 組定めることが分かります.

そこで, これまでに得られたベクトルをすべて集めてくると, 長さが $(m_0 + 1)$ のひと繋ぎの「箱」が d_{m_0} 組と, 長さが m_0 のひと繋ぎの「箱」が $(d_{m_0-1} - d_{m_0})$ 組出来ることになると思いますが, 前と同様にして, これらのベクトルたちは線型独立になることと, それぞれの $l = 1, 2, \dots, d_{m_0-1}$ に対して,

$$\begin{cases} \mathbf{u}_k^{(l)} \in \text{Im } N^{k'}, & k' \leq k \text{ のとき} \\ \mathbf{u}_k^{(l)} \notin \text{Im } N^{k'}, & k' > k \text{ のとき} \end{cases}$$

となることが分かります.³⁰ したがって, これらのベクトルたちは, 図 3 のような状況にあることが分かります. 図 1 では, 右端のベクトルを集めた $\{\mathbf{u}_{m_0}^{(l)}\}_{l=1,2,\dots,d_{m_0}}$ が, $\text{Im } N^{m_0}$ という線型部分空間の基底を定めているだけで, 一般には, 図 1 に登場するベクトルだけでは, その他の $\text{Im } N^{m_0-1}, \text{Im } N^{m_0-2}$ などの線型部分空間の基底を定めるには数が足りないわけですが, 図 3 では, さらに, 右端から二番目までのベクトルたちを集めた $\{\mathbf{u}_{m_0-1}^{(l)}, \mathbf{u}_{m_0}^{(l)}\}_{l=1,2,\dots,d_{m_0-1}}$ も, $\text{Im } N^{m_0-1}$ という線型部分空間の基底を定めるように改善されていることに注意します.³¹

以下, 同様にして, $\text{Im } N^{m_0-2}, \text{Im } N^{m_0-3}$ などの基底を定める操作を繰り返してゆけば, 求める $\text{Im } N^0 = \mathbb{C}^n$ の「上手い基底」が得られることにはなりますが, このことを数学的帰納法を用いて確認してみることになります. いま, $m \in \mathbb{N}$ として, 上の操作を $(m - 1)$ 回行なったとすると, 図 4 で表わされるような一連のベクトルが得られることになります.³² このとき, この操作で, $\text{Im } N^{m_0-(m-1)}$ という線型部分空間の基底が得られているとして, 次のステップに進めるということを確認してみることにします. そのために, 前と同様に, 行

³⁰ 皆さん, 前に行なった議論を参考にして, これらのことを確かめてみて下さい.

³¹ ここで, 議論のポイントが理解しやすいように, $l > d_{m_0}$ に対して, $\mathbf{u}_{m_0}^{(l)} = \mathbf{0}$ であると約束することにして, 添え字の範囲の表記が煩雑にならないようにしました.

³² ここで, 図が煩雑になるといけないので, それぞれのベクトルを単に「箱」で表わし, 「箱」の中に対応するベクトルを書き入れることはしないことにしました.

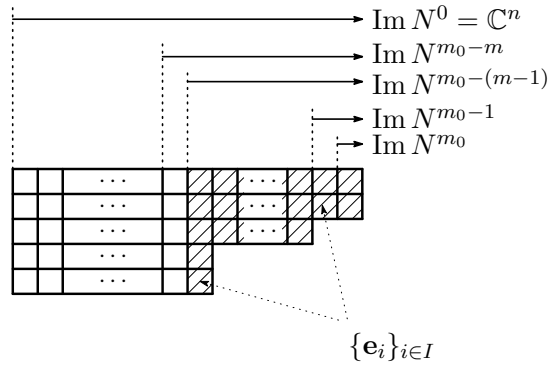


図 4: $(m-1)$ 回の操作で, $\text{Im } N^{m_0-(m-1)}$ の基底 (図の斜線部) を定めるような一連のベクトルが得られる.

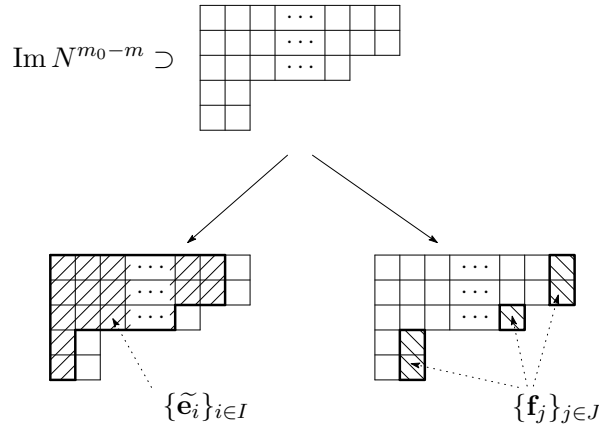


図 5: 図 4 に現われる $\text{Im } N^{m_0-m}$ に属するベクトルたちを $\{\tilde{\mathbf{e}}_i\}_{i \in I}, \{\mathbf{f}_j\}_{j \in J}$ という二組に分ける.

列 N を掛け算することによって定まる線型写像

$$L_N : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

の定義域を $\text{Im } N^{m_0-m}$ という線型部分空間に制限することによって得られる線型写像

$$L_N|_{\text{Im } N^{m_0-m}} : \text{Im } N^{m_0-m} \rightarrow \mathbb{C}^n$$

をもとにして, $\text{Im } N^{m_0-m}$ の様子を調べてみることにします.

いま, 図 4 の斜線部に現われる $\text{Im } N^{m_0-(m-1)}$ の基底を $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in I}$ と表わすことにします.³³ また, 行列 N を掛け算することによって, 図 4 に現われるベクトルたちは, 一斉に右側にひとつずつずれることに注意して, 図 4 に現われる $\text{Im } N^{m_0-m}$ という線型部分空間に属するベクトルたちを, 図 5 のように二組に分けることにします. すると, 前と同様にして,

$$\text{Im}(L_N|_{\text{Im } N^{m_0-m}}) = \text{Im } N^{m_0-(m-1)}$$

³³ここで, 以下の議論のポイントがハッキリするように, 添え字「 i 」の動く範囲をきちんと表わすことはせずに, $i \in I$ というように象徴的に表わすことにしました.

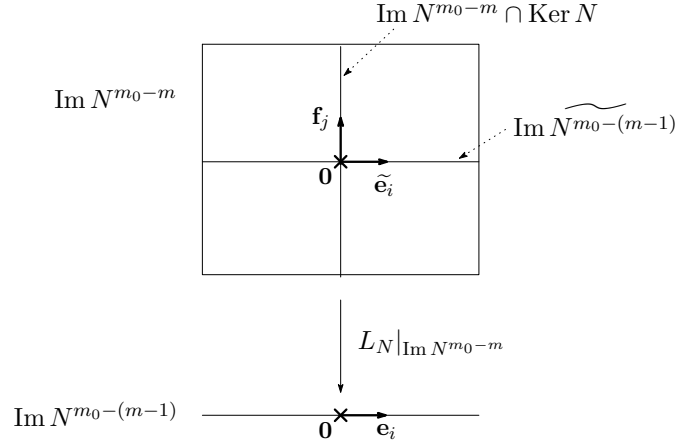


図 6: 図 4 に現われる $\text{Im } N^{m_0-m}$ に属するベクトルたちのうち, $\tilde{\mathbf{e}}_i$ たちは「横方向」 $\text{Im } N^{m_0-(m-1)}$ に属し, \mathbf{f}_j たちは「縦方向」 $\text{Im } N^{m_0-m} \cap \text{Ker } N$ に属する.

となることが分かりますが,

$$N\tilde{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_i$$

となるように $\tilde{\mathbf{e}}_i$ の添え字 i を定めることができますから, $\{\tilde{\mathbf{e}}_i\}_{i \in I}$ の定める $\text{Im } N^{m_0-m}$ 内の線型部分空間

$$\bigoplus_{i \in I} \mathbb{C}\tilde{\mathbf{e}}_i \subset \text{Im } N^{m_0-m}$$

は, 線型写像 $L_N|_{\text{Im } N^{m_0-m}}$ によって, 一対一にピッタリと $\text{Im } N^{m_0-(m-1)}$ と対応することが分かります. したがって, $\text{Im } N^{m_0-m}$ 内の $\text{Im } N^{m_0-(m-1)}$ のコピーとして,

$$\text{Im } N^{m_0-(m-1)} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C}\tilde{\mathbf{e}}_i$$

が取れることが分かります. よって, 前と同様に, $\text{Im } N^{m_0-m}$ は,

$$\text{Im } N^{m_0-m} = (\text{Im } N^{m_0-m} \cap \text{Ker } N) \oplus \text{Im } N^{m_0-(m-1)}$$

というように, 「縦方向」 $\text{Im } N^{m_0-m} \cap \text{Ker } N$ と「横方向」 $\text{Im } N^{m_0-(m-1)}$ に直和分解されることが分かります.

また, \mathbf{f}_j たちは, 図 4 の各行の右端に現われるベクトルですから,

$$N\mathbf{f}_j = \mathbf{0}$$

となることが分かります. よって, $j \in J$ に対して,

$$\mathbf{f}_j \in \text{Im } N^{m_0-m} \cap \text{Ker } N$$

となることが分かります. 以上より, $\text{Im } N^{m_0-m}$ という線型部分空間の様子は, 図 6 のようになっていることが分かります. いま, $\{\tilde{\mathbf{e}}_i\}_{i \in I}$ は, $\text{Im } N^{m_0-(m-1)}$ の基底を定めますか

ら, たとえ, $\{\tilde{\mathbf{e}}_i, \mathbf{f}_j\}_{i \in I, j \in J}$ だけでは, 数が足りないために, $\text{Im } N^{m_0-m}$ の基底を定めることができない場合でも, 数が足りない方向は $\text{Im } N^{m_0-m} \cap \text{Ker } N$ という「縦方向」だけなので, $\text{Im } N^{m_0-m} \cap \text{Ker } N$ の元をいくつか付け加えることによって, $\text{Im } N^{m_0-m}$ の基底を定めることができることが分かります.

そこで, 前と同様に,

$$\begin{aligned} d_{m_0-m} &= \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(L_N|_{\text{Im } N^{m_0-m}}) \\ &= \dim_{\mathbb{C}}(\text{Im } N^{m_0-m} \cap \text{Ker } N) \end{aligned}$$

として, 必要であれば, $\{\mathbf{f}_j\}_{j \in J}$ に, $(d_{m_0-m} - |J|)$ 個のベクトル $\mathbf{u}_{m_0-m}^{(l')}$ を付け加えることで,

$$\{\mathbf{f}_j, \mathbf{u}_{m_0-m}^{(l')}\}_{j \in J, l' = |J|+1, \dots, d_{m_0-m}-|J|}$$

が, $\text{Im } N^{m_0-m} \cap \text{Ker } N$ の基底になるように定めることにします.³⁴ このとき, 前と同様に, $l' = |J| + 1, \dots, d_{m_0-m} - |J|$ に対して,

$$\mathbf{u}_{m_0-m}^{(l')} = N^{m_0-m} \mathbf{u}_0^{(l')}$$

となるようなベクトル $\mathbf{u}_0^{(|J|+1)}, \dots, \mathbf{u}_0^{(d_{m_0-m}-|J|)} \in \mathbb{C}^n$ を勝手にひとつずつ取ってきて,

$$\mathbf{u}_k^{(l')} = N^k \mathbf{u}_0^{(l')}, \quad (k = 0, 1, \dots, m_0 - m) \quad (110)$$

と定めると, これらは,

$$\mathbf{u}_0 \xrightarrow{N} \mathbf{u}_1 \xrightarrow{N} \mathbf{u}_2 \xrightarrow{N} \dots \xrightarrow{N} \mathbf{u}_{m_0-m} \xrightarrow{N} \mathbf{0} \quad (111)$$

という関係にある長さ $(m_0 - m + 1)$ の一連のベクトルを $(d_{m_0-m} - |J|)$ 組定めることが分かります.

このとき, 定義により, $k = 0, 1, \dots, m_0 - m$ に対して,

$$\mathbf{u}_k^{(l')} \in \text{Im } N^k$$

となることが分かりますが, 前と同様に, さらに,

$$\mathbf{u}_k^{(l')} \notin \text{Im } N^{k+1}$$

となることが, 次のようにして分かります.

そのために, 仮に,

$$\mathbf{u}_k^{(l')} \in \text{Im } N^{k+1}$$

であると仮定してみることにします. すると, $\text{Im } N^{k+1}$ の定義によって, 適当なベクトル $\mathbf{v}^{(l')} \in \mathbb{C}^n$ が存在して, $\mathbf{u}_k^{(l')}$ は,

$$\mathbf{u}_k^{(l')} = N^{k+1} \mathbf{v}^{(l')} \quad (112)$$

というように表わされるということになります. このとき, $\mathbf{u}_{m_0-m}^{(l')}$ というベクトルを考えてみると,

$$\mathbf{u}_{m_0-m}^{(l')} = N^{m_0-m} \mathbf{u}_0^{(l')} \quad ((110) \text{ 式から })$$

³⁴ここで, 添え字の集合 J の元の個数を $|J|$ と表わしました.

$$\begin{aligned}
&= N^{m_0-m-k}(N^k \mathbf{u}_0^{(l')}) \\
&= N^{m_0-m-k} \mathbf{u}_k^{(l')} \quad ((110) \text{ 式から}) \\
&= N^{m_0-m-k}(N^{k+1} \mathbf{v}^{(l')}) \quad ((112) \text{ 式から}) \\
&= N^{m_0-(m-1)} \mathbf{v}^{(l')}
\end{aligned}$$

となることが分かります.³⁵ したがって,

$$\mathbf{u}_{m_0-m}^{(l')} \in \text{Im } N^{m_0-(m-1)} \quad (113)$$

となりますが, これは, 図4の中にすでに現われている $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in I}$ たちが $\text{Im } N^{m_0-(m-1)}$ の基底になるという事実と矛盾してしまいます.³⁶

以上から,

$$\begin{cases} \mathbf{u}_k^{(l')} \in \text{Im } N^{k'}, & k' \leq k \text{ のとき} \\ \mathbf{u}_k^{(l')} \notin \text{Im } N^{k'}, & k' > k \text{ のとき} \end{cases}$$

となることが分かりますから, 図4に現われるベクトルたちに, (111) 式のような関係にあるこれらの一連のベクトル ($d_{m_0-m} - |J|$) 組を加えたときの様子は, 図7のようになることが分かります. また, 前と同様にして, これらのベクトルは線型独立となることを確かめることもできます.³⁷ したがって, m 回の操作によって, 図4と同じ状況で, $\text{Im } N^{m_0-m}$ の基底が得られることが分かりました.

これより, この操作は, どこまでも続けていくことができることが分かりますから, 特に, m_0 回の操作を行なった後を考えてみると, 一般に, 図8のような形で表現されるような \mathbb{C}^n の基底が得られることが分かります. ここで, 図8の各行は,

$$\mathbf{u}_0 \xrightarrow{N \cdot} \mathbf{u}_1 \xrightarrow{N \cdot} \mathbf{u}_2 \xrightarrow{N \cdot} \cdots \xrightarrow{N \cdot} \mathbf{u}_m \xrightarrow{N \cdot} \mathbf{0}$$

という関係にある一連のベクトルを表わしていますから, この節の最初に見たように, 線型写像 L_N は, これらのベクトルが定める線型部分空間

$$\mathbb{C}\mathbf{u}_0 \oplus \mathbb{C}\mathbf{u}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\mathbf{u}_m$$

³⁵前と同様に, これも「絵」で表わせば,

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbf{u}_0 & \xrightarrow{N \cdot} & \mathbf{u}_1 & \xrightarrow{N \cdot} & \cdots & \xrightarrow{N \cdot} & \mathbf{u}_k & \xrightarrow{N \cdot} & \mathbf{u}_{k+1} & \xrightarrow{N \cdot} & \cdots & \xrightarrow{N \cdot} & \mathbf{u}_{m_0-m} \\
& & & & & & & \parallel & & & & & \\
& & & & & & & N^{k+1} \mathbf{v} & & & & &
\end{array}$$

となることから,

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbf{u}_0 & \xrightarrow{N \cdot} & \mathbf{u}_1 & \xrightarrow{N \cdot} & \cdots & \xrightarrow{N \cdot} & \mathbf{u}_k & \xrightarrow{N \cdot} & \mathbf{u}_{k+1} & \xrightarrow{N \cdot} & \cdots & \xrightarrow{N \cdot} & \mathbf{u}_{m_0-m} \\
& & & & & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\
& & & & & & N^{k+1} \mathbf{v} & \xrightarrow{N \cdot} & N^{k+2} \mathbf{v} & \xrightarrow{N \cdot} & \cdots & \xrightarrow{N \cdot} & N^{m_0-(m-1)} \mathbf{v}
\end{array}$$

となることが分かるということです.

³⁶すなわち, 仮定により, $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in I}$ は, $\text{Im } N^{m_0-(m-1)}$ の基底になりますから, (113) 式のように, これらと線型独立になるような新しい元 $\mathbf{u}_{m_0-m}^{(l')}$ が見つかることはありえないわけです.

³⁷皆さん, 確かめてみて下さい.

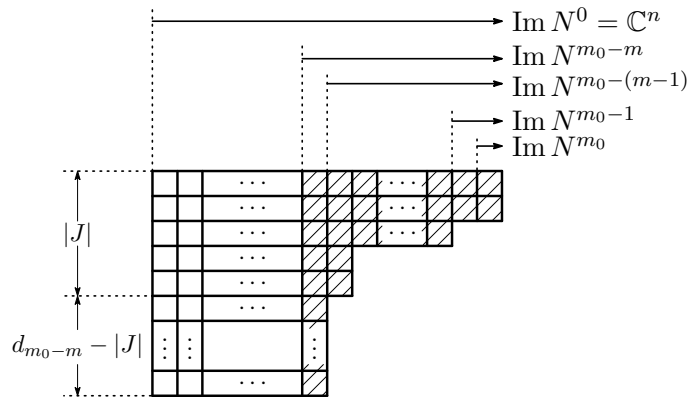


図 7: m 回の操作で, $\text{Im } N^{m_0-m}$ の基底 (図の斜線部) を定めるような一連のベクトルが得られる.

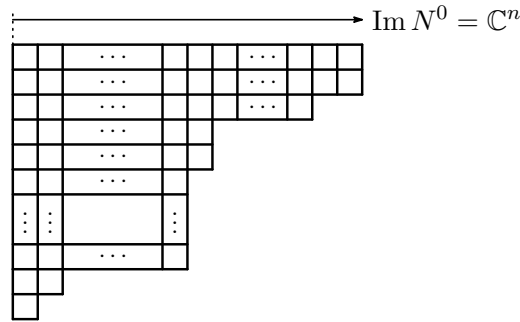


図 8: m_0 回の操作を行なった後で, \mathbb{C}^n の基底が得られる.

上で, $\{\mathbf{u}_m, \dots, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_0\}$ という基底に関して,

$$J_{m+1}(0) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{m+1 \text{ コ}}$$

というひとつの Jordan 細胞の形で表現されることが分かります.³⁸ したがって, 図 8 で表わされるような「上手い基底」を用いて線型空間 \mathbb{C}^n の「番地割り」をやり直すことによって, ベキ零行列 N は Jordan 標準形に変換されることが分かりました.

³⁸表現行列が Jordan 細胞の形になるように, \mathbf{u}_i たちの順番を $\{\mathbf{u}_m, \dots, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_0\}$ というように取り換えたことに注意して下さい.

9 ベキ零行列の Jordan 標準形を求めるには

さて, 7 節では, 3 行 3 列のベキ零行列 N に対しては, N の Jordan 標準形を決定するためには, 最小多項式 $\psi_N(x)$ を調べるだけで十分であることを見ました. その一方で, 例えば,

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

というベキ零行列に対して, それらの最小多項式 $\psi_{N_1}(x), \psi_{N_2}(x)$ は,

$$\psi_{N_1}(x) = \psi_{N_2}(x) = x^2$$

となるというように, 行列のサイズが 4 行 4 列以上の場合には, 最小多項式を調べるだけでは, 必ずしも Jordan 標準形を決定することができない場合があるということも注意しました. こうした場合には, Jordan 標準形を決定するためには, 別な考察が必要になりますが, 8 節で行なった議論を見返すと, ベキ零行列に対する Jordan 標準形を決定するためのヒントを与えてくれていることが分かります. そこで, ここでは, 8 節の議論をもとにして, ベキ零行列に対する Jordan 標準形を決定する方法について考えてみることにします.

そこで, いま, $n \in \mathbb{N}$ として, n 行 n 列のベキ零行列 N が, 勝手にひとつ与えられているとします. このとき, 8 節で見たように, ベキ零行列 N に対して, 図 8 で表わされるような \mathbb{C}^n の「上手い基底」が存在することが分かります. すると, 8 節で注意したように, 図 8 の中の各行が, ベキ零行列 N の Jordan 標準形における各 Jordan 細胞にあたりますから, ベキ零行列 N の Jordan 標準形を決定する問題は, 与えられたベキ零行列 N に対して, 図 8 の図形が, どのような形になるのかということを決める問題であると解釈できることが分かります. そこで, 以下では, 与えられたベキ零行列に対して, 図 8 の図形を決定する問題を考えてみることにします.

さて, 8 節で見てきたように, 図 8 において, 左から k 番目の列は, $\text{Im } N^{k-1}$ と $\text{Im } N^k$ の「食い違い」を表わしていることに注意します (図 9 を参照). よって,

$$r_k = \dim_{\mathbb{C}} \text{Im } N^k$$

と表わすことにすると, $k \in \mathbb{N}$ に対して, 左から k 番目の列にある「箱」の数 a_k は,

$$a_k = r_{k-1} - r_k \tag{114}$$

で与えられることが分かります. 第 8 回の問 3 のところで見たとように,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Im } N^k = \text{rank } N^k$$

となりますから, r_k は,

$$r_k = \text{rank } N^k$$

というように表わすこともできます. したがって, 例えば, 第 3 回の問 1 のところで見たとように, それぞれの N^k に対して, 行と列に関する基本変形を施すことによって,

$$r_k = \text{rank } N^k$$

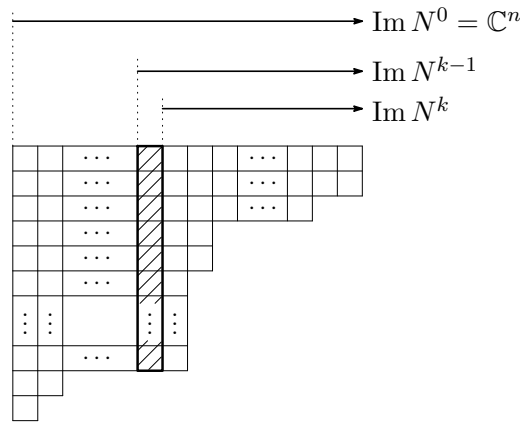


図 9: 左から k 番目の列は, $\text{Im } N^{k-1}$ と $\text{Im } N^k$ の「食い違い」を表わしている.

を求めることができます.³⁹ こうして r_k を求めた後で, (114) 式により定まる a_k を求めて, 左から k 番目の列に, 縦に a_k 個並んだ「箱」の列を順番に並べてゆけば, 図 8 に対応した図形が求まることが分かります. 8 節の議論から, こうして求まった図形の各行が, ベキ零行列 N の Jordan 標準形における各 Jordan 細胞に対応するのですから, 各行に現われる「箱」の数を順番に見てゆけば, どのようなサイズの Jordan 細胞がいくつ存在するのかということが分かりますから, これにより, N の Jordan 標準形の形が決定できることとなります. 以上から, 「ベキ零行列 N の Jordan 標準形を決定する問題」は「ベキ零行列 N のそれぞれのベキ N^k , ($k = 0, 1, 2, \dots$) の rank を決定する問題」として解釈できることが分かりました.

さて, 図 8 に現われたような形の図形は, 数学の様々な場面で登場するのですが, こうした図形を Young diagram と呼びます.⁴⁰ 上の a_k の定義だけでは明らかなことではありませんが, 8 節の議論から, 図 8 の図形は, 左へ進むほど, 一列の長さが大きくなることが分かりますから,

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_{m_0+1} \quad (115)$$

となることが分かります. また, この図形に現われるひとつひとつの「箱」が \mathbb{C}^n の「上手い基底」のひとつひとつのベクトルに対応するのですから,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$$

であることを考えると,

自然数 n をいくつかの自然数の和に分解する

$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_{m_0+1} \quad (116)$$

となることが分かります. したがって, 「箱」の数が n の Young diagram は, (116) 式

³⁹あるいは, 本質的には同じことですが, 第 8 回の問 3 のところで見たとように, $\text{Im } N^k$ の基底を直接求めることで, $r_k = \dim_{\mathbb{C}} N^k$ を求めることもできます.

⁴⁰Young とは, n 個の元を入れ替える操作全体の持つ性質を調べる上で, こうした図形を用いて考察することがとても便利であることを示した数学者の名前です.

のように、自然数 n をいくつかの自然数の和に分解し、それらを、(115) 式のように、大きさの順番に並べたものと解釈できることが分かります。一般に、与えられた自然数 n に対して、(115) 式、(116) 式を満たすような自然数の組 $(a_1, a_2, \dots, a_{m_0+1})$ を与えることを n の分割と呼びます。また、与えられた自然数 n に対する異なる n の分割の仕方の総数を n の分割数と呼びます。こうした言葉を用いると、これまでの議論から、 n 行 n 列のベキ零行列に対して、Jordan 標準形のタイプと n の分割が一对一に対応し、互いに異なる Jordan 標準形のタイプは n の分割数の分だけ存在することが分かります。⁴¹

例えば、 $n = 3$ であるとするれば、

$$\begin{aligned} 3 &= 1 + 1 + 1 \\ &= 2 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

という三通りの 3 の分割が存在することになりますが、これらは、それぞれ、図 10 で与えられる Young diagram と対応し、

3 の分割と 3 行 3 列のベキ零行列に対する Jordan 標準形との対応

$$\begin{aligned} (1, 1, 1) &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ (2, 1) &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ (3) &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

という Jordan 標準形のタイプが対応するということになります。⁴²

さて、それぞれの自然数 $k \in \mathbb{N}$ に応じて、変数 x_k を用意して、Young diagram に現われる「箱」の数が k 個の列に x_k を対応させて考えると、それぞれの Young diagram に、 x_1, x_2, x_3, \dots の単項式を対応させることができます。例えば、 $n = 3$ の例であれば、

⁴¹一方、 n 行 n 列のベキ零行列に対する最小多項式のタイプは x, x^2, \dots, x^n の n 通りしか存在しないことに注意します。

⁴²それぞれの Young diagram に対して、各列に含まれる「箱」の数から定まる $(a_1, a_2, \dots, a_{m_0+1})$ という n の分割を対応させるのではなく、上から l 番目の行に含まれる「箱」の数を b_l として、各行に含まれる「箱」の数から定まる $(b_1, b_2, \dots, b_{l_0})$ という n の分割を対応させて考える方が、 n の分割 $(b_1, b_2, \dots, b_{l_0})$ を、直接、「Jordan 標準形に表われる Jordan 細胞のサイズを大きさの順に並べたもの」と解釈することができて都合が良いのですが、例えば、 3 を $3 = 1 + 1 + 1$ と分割する場合には $(1, 1, 1)$ と表わずというように、 n の分割を数字を横に並べて表わすのが普通ですから、Young diagram と分割数を対応させて考える場合にも、余計な混乱が生じないように、図 10 のように、 $(1, 1, 1)$ などに現われる数字を各列に現われる「箱」の数と解釈するという前者の流儀を採用することにしました。皆さんは、ここでの流儀に捕らわれずに、自分で混乱しないと思われる方の流儀で解釈し直して理解して下さい。

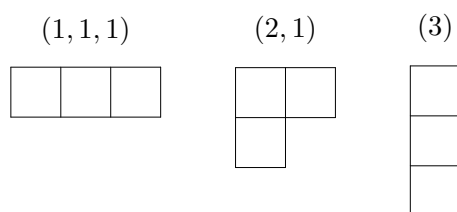


図 10: 3 の分割に対応した Young diagram.

自然数の分割と単項式の間に対応 (3 の分割の場合)

$$\begin{aligned} (1, 1, 1) &\longleftrightarrow x_1 x_1 x_1 = x_1^3 \\ (2, 1) &\longleftrightarrow x_2 x_1 \\ (3) &\longleftrightarrow x_3 \end{aligned}$$

と対応させることができます. このことと,

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

という Taylor 展開の右辺には q^k という単項式がちょうど一回ずつ登場するということに注意すると, n の分割数を D_n として, 分割数の母関数が,

分割数の母関数

$$1 + D_1 q + D_2 q^2 + D_3 q^3 + \dots = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)} \quad (117)$$

という式で与えられることが分かります. ここで, (117) 式の右辺には「無限積」が登場していますが, 例えば, D_3 を求めるためには q^3 の項まで計算できれば十分ですから, q^4 以上の項は無視してしまうと,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)} &= \prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^k + q^{2k} + q^{3k} + \dots) \\ &= (1 + q + q^2 + q^3 + \dots)(1 + q^2 + \dots)(1 + q^3 + \dots) \prod_{k=4}^{\infty} (1 + \dots) \\ &= (1 + q + q^2 + q^3 + \dots)(1 + q^2 + \dots)(1 + q^3 + \dots) \\ &= (1 + q + q^2 + q^3 + \dots)(1 + q^2 + q^3 + \dots) \\ &= 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + \dots \end{aligned}$$

などと計算することができます.

興味がある方は, Young diagram と x_1, x_2, x_3, \dots の単項式をピッタリ一対一に対応させることができるということと, (117) 式は,

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty} (1 - x_k)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - x_k)}$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} (1 + x_k + x_k^2 + x_k^3 + \cdots)$$

という式において、 $x_k \rightsquigarrow q^k$ と置き換えることにより得られるということに注意して、(117) 式の等号が成り立つことを確かめてみて下さい。