数学 II 演習 (第 11 回)

問 1. $\lambda \in \mathbb{C}$ として,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

とする.

(1) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して, A^n を求めよ.

(2) $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ として, 多項式 $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ の変数 x のところに行列 A を代入して得られる行列を

$$f(A) = aI + bA + cA^2 + dA^3$$

と表わす. ただし, 単位行列を I と表わした. このとき,

$$f(A) = O$$

となるための条件を, a, b, c, d と λ を用いて表わせ. ただし, 零行列を O と表わした.

(3) $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ として, n 次の多項式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

を考える. このとき,

$$f(A) = O \iff f(\lambda) = f'(\lambda) = f''(\lambda) = 0$$

となることを示せ.

(4) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して, B^n を求めよ.

(5) (3) と同様にして, 多項式 $f(x)$ に対して, $f(B) = O$ となる条件を求めよ.

♣ 余裕があれば, $A = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{n\text{ コ}}$ に対して, 同様にして, $f(A) = O$ となる条件を求めよ.

♠ 裏もあります.

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

● 問 1 で考えたような複素数を係数とする多項式全体の集合を $\mathbb{C}[x]$ という記号で表わすことにする. すなわち,

$$\mathbb{C}[x] = \{ f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid n \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C} \}$$

である.

問 **2.**
正方行列 A に対して,

$$I_A = \{ f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(A) = O \}$$

という $\mathbb{C}[x]$ の部分集合を考える. (イメージしにくければ, 問 1 のように A は 3 行 3 列の行列であると思ってもよい.) このとき, 次の問に答えよ.

(1) $f(x), g(x) \in I_A$ のとき,

$$f(x) + g(x) \in I_A$$

となることを示せ.

(2) $f(x) \in I_A$, $h(x) \in \mathbb{C}[x]$ のとき,

$$f(x)h(x) \in I_A$$

となることを示せ.

(3) 行列 A と同じサイズの正則行列 P に対して, $A' = P^{-1}AP$ とする. このとき, $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して,

$$(A')^n = P^{-1}A^nP$$

となることを示せ.

(4) 勝手な多項式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ に対して,

$$f(A') = P^{-1}f(A)\,P$$

となることを示せ.

(5) $I_A = I_{A'}$ となることを示せ.