数学 II 演習 (第 2 回) の略解

目 次

1 問 1 の解答

$z = x + yi,\ z' = x' + y'i \in \mathbb{C}$ と表わすことにします.

(1) $z + z' = (x + x') + (y + y')i$ となるので,

$$
\begin{aligned}
A(z + z') &= \begin{pmatrix} x + x' & -(y + y') \\ y + y' & x + x' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix} \\
&= A(z) + A(z')
\end{aligned}
$$

となることが分かります.

(2) $zz' = (x+yi)(x'+y'i) = (xx'-yy') + (xy'+yx')\ i$ となるので,

$$A(zz') = \begin{pmatrix} xx'-yy' & -(xy'+yx') \\ xy'+yx' & xx'-yy' \end{pmatrix} \tag{1}$$

となることが分かります. 一方, $A(z)A(z')$ を計算してみると,

$$\begin{aligned} A(z)A(z') &= \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xx'-yy' & -xy'-yx' \\ yx'+xy' & -yy'+xx' \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

となることが分かります. よって, (1) 式, (2) 式から,

$$A(zz') = A(z)A(z')$$

となることが分かります.

(3) $1 = 1 + 0 \cdot i$ となるので,

$$\begin{aligned} A(1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I \end{aligned}$$

となることが分かります.

(4) $\bar{z} = x - yi$ となるので,

$$\begin{aligned} A(\bar{z}) &= \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \\ &= {}^t A(z) \end{aligned}$$

となることが分かります.

(5) $|z|^2 = z\bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 + y^2$ となることに注意すると,

$$\begin{aligned} A(z) \cdot {}^t A(z) &= \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^2+y^2 & 0 \\ 0 & x^2+y^2 \end{pmatrix} \\ &= |z|^2 \cdot I \end{aligned}$$

となることが分かります.

上で見てきたことは, 複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して, 行列 $A(z)$ を対応させるとき,

(1) 「複素数の足し算」は「行列の足し算」に化ける.

(2) 「複素数の掛け算」は「行列の掛け算」に化ける.

(3) 「複素数の掛け算の単位元」である 1 は「行列の掛け算の単位元」である単位行列 I に化ける.

(4) 「複素数で複素共役をとる」ことは「行列で転置をとる」[1]ことに化ける.

(5) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ という関係を行列の形に化かしたもの.

ということを表わしています.

2　行列としての複素数

問 1 では, 複素数 $z = x + yi \in \mathbb{C}$, $(x, y \in \mathbb{R})$ に対して,

$$A(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

という 2 行 2 列の行列を対応させてみました. 第 1 回の問 3 のところで見たように, **この行列 $A(z)$ は, 複素平面 $\mathbb{C}$ を,**

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$$

というように $\mathbb{R}^2$ と同一視して,[2]「複素数 z を掛け算する」という操作を $\mathbb{R}^2$ 上の変換であると考えたときに, この変換を与えるような行列として得られるのでした. いま, 2 行 2 列の実数行列全体の集合を,

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

と表わすことにすると,[3] 上の対応は, 複素数の集合 $\mathbb{C}$ から 2 行 2 列の実数行列全体の集合 $M_2(\mathbb{R})$ への写像

$$A : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$$

[1]すなわち, 行と列をひっくり返すということです.

[2]一般に, 二つの集合 S, T に対して, S と T が同じ集合を表わしているときに, すなわち, S と T が同じ元からなる集合であるときに,「$S = T$」と表わします. これに対して, S と T は同じ元からなる集合ではないけれども, あるやり方で S の元と T の元をピッタリ一対一に対応させて考えることができるときに,「$S \cong T$」という記号を用いて表わしたりします. 例えば, $S = \{1, 2\}$, $T = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 3x + 2 = 0\}$ とすると, S と T は見かけは違って見えますが, どちらも 1, 2 という二つの元からなる集合ですから, $S = T$ となるわけです. 一方, $S = \mathbb{C}$, $T = \mathbb{R}^2$ とすると, $\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ は集合としては異なりますが,

$$\mathbb{C} \ni z = x + yi \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

という対応によって, $\mathbb{C}$ の元と $\mathbb{R}^2$ の元がピッタリ一対一に対応しますから, この対応によって, $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ と同一視できるというわけです.

[3]英語で, **行列**のことを <u>m</u>atrix と言います. また,「2」は **2 行 2 列**の行列を考えていることを,「$\mathbb{R}$」は**実数**行列 (<u>r</u>eal matrix) を考えていることを表わしています.

をひとつ定めたことになります．このとき, $z, z' \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\begin{aligned} z &\longmapsto A(z) \\ z' &\longmapsto A(z') \end{aligned}$$

という行列が対応しているとすると, 上で見たように,

$$\begin{array}{ccc} z+z' & \longmapsto & A(z)+A(z') \\ zz' & \longmapsto & A(z)\cdot A(z') \\ 1 & \longmapsto & I \end{array}$$

などの関係が成り立つことが分かります．すなわち, **$\boldsymbol{A}$ という写像は「複素数の足し算」を「行列の足し算」に写し,「複素数の掛け算」を「行列の掛け算」に写すような写像になっている**ことが分かります．

このように, 集合上に入っている構造[4]を保つような写像のことを, 数学では, 一般に, **準同型写像**と言います．ここで,「準」という言葉がついているのは, $M_2(\mathbb{R})$ の中には, 例えば,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

という行列のように, 必ずしも複素数に対応しないような行列も含まれているために, 写像 A によって, $\mathbb{C}$ という集合の元と $M_2(\mathbb{R})$ という集合の元とが, ピッタリと一対一には対応していないからです．しかし,

$$A(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

という形の行列に対しては, $z = x + iy \in \mathbb{C}$ という複素数がピッタリひとつ定まりますから, **複素数とは,**

$$\boldsymbol{A(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}}$$

という特別な形をした 2 行 2 列の行列全体であるとも考えることができます．このように, **行列は様々な「数」を「表現する」のにも役立ちます**.

3　問 2 の解答

(1) 三角関数の加法定理

$$\begin{cases} \cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \\ \sin(\theta+\varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi \end{cases} \tag{3}$$

を用いると,

$$R(\theta)\cdot R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

[4] 今の場合は,「足し算」や「掛け算」ができるという代数的な構造のことです.

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix} && \text{((3) 式から)} \\
&= R(\theta+\varphi) && (4)
\end{aligned}$$

となることが分かります.

この (4) 式は, **φ 回転してから, さらに θ 回転することは, 一度に $(\theta+\varphi)$ 回転することと同じことである**ということを意味しています.

(2) 例えば, (1) の結果と合わせて, 数学的帰納法を用いて証明することができます.[5]

(3) (3) 式という三角関数の加法定理と数学的帰納法を用いて証明しても, もちろん構いませんが, ここでは, 問 1 と問 2 の (2) の結果を用いて証明してみることにします.

そこで, $\theta \in \mathbb{R}$ として,

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \in \mathbb{C}$$

という絶対値が 1 の複素数を考えてみます. すると, 問 1 で考えた行列 $A(z)$ は, この場合,

$$\begin{aligned}
A(z) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= R(\theta) && (5)
\end{aligned}$$

となっていることが分かります. いま, 仮に,

$$z^n = x' + y'i \in \mathbb{C}$$

と表わすことにすると, 行列 $A(\cdot)$ の定義から, $A(z^n)$ は,

$$A(z^n) = \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix} \tag{6}$$

というように表わせることが分かります. 一方, 問 1 の (2) で見たように, 写像

$$A : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$$

によって,「複素数の掛け算」は「行列の掛け算」に写ることが分かりますから,

$$A(z^n) = A(z)^n \tag{7}$$

となることが分かります. よって, (5) 式, (7) 式と問 2 の (2) の結果を合わせると,

$$A(z^n) = A(z)^n$$

[5] 皆さん, 確かめてみて下さい.

$$
\begin{aligned}
&= R(\theta)^n \\
&= R(n\theta) \qquad (8)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. そこで,

$$
R(n\theta) = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix} \tag{9}
$$

となることに注意して, (8) 式の両辺の行列の成分を比べてみると, (6) 式, (9) 式から,

$$
\begin{cases} x' = \cos(n\theta) \\ y' = \sin(n\theta) \end{cases}
$$

となることが分かります. したがって,

$$
\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^n &= z^n \\
&= x' + y'i \\
&= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)
\end{aligned}
$$

となることが分かります.

4　問 2 を見直すと

問 2 は, 皆さん良くご存じの**三角関数の加法定理**の意味を, 行列の立場から見直してもらおうと思って出題してみました. 問 2 の (1) で見たように, 行列の立場から見直すと,

三角関数の加法定理

$$
\begin{cases} \cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \\ \sin(\theta+\varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi \end{cases}
$$

という**三角関数の加法定理とは,**

回転を用いた加法定理の言い換え

$$
R(\theta+\varphi) = R(\theta)\cdot R(\varphi) \tag{10}
$$

というように,「平面 $\mathbb{R}^2$ 上で, φ 回転してから, さらに θ 回転することは, 一度に $(\theta+\varphi)$ 回転することと同じことである」という事実を表わしていると理解することができます. すなわち, θ 回転を表わす行列 $R(\theta)$ さえ正しく導くことができれば, 皆さんは, いつでも自分の手で, (10) 式から, 三角関数の加法定理を導くことができるわけです. また, 第 1 回の問 3 のところで見たように, 行列 $R(\theta)$ の形自体は,

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2
$$

という特別なベクトルが, θ 回転により, それぞれ,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

というベクトルに写されるということから導くことができます.[6]

さて, 第 1 回の問 3 の (4) のところで見たように, 回転行列 $R(\theta)$ は,

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \in \mathbb{C} \tag{11}$$

という絶対値が 1 の複素数に対応していました. また, 問 1 の (2) のところで見たように, この対応によって,「複素数の掛け算」は「行列の掛け算」に対応しますから, $z^n \in \mathbb{C}$ という複素数には $R(\theta)^n \in M_2(\mathbb{R})$ という行列が対応しているはずです. ここで, $R(\theta)^n$ という行列は, θ 回転を n 回続けて施すという操作を表わしていますが, この操作は, 一度に $n\theta$ 回転を施すという操作と同じことですから,

$$R(\theta)^n = R(n\theta)$$

となっているはずです. そこで, (11) 式で与えられる複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して, $z^n \in \mathbb{C}$ とは, $R(\theta)^n = R(n\theta) \in M_2(\mathbb{R})$ という行列に対応する複素数であると考えると,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \tag{12}$$

となることが分かるということが, 上で挙げた問 2 の (3) に対する解答の意味です. すなわち, 複素数を特別な形をした 2 行 2 列の行列であると考えると,

絶対値が 1 の複素数と回転行列の対応

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \ni \cos\theta + i\sin\theta & \longleftrightarrow & R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \\ (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) & \longleftrightarrow & R(\theta)^n = R(n\theta) \end{array}$$

という対応があることが分かります.

ここで, (12) 式において, 例えば, $n = 2$ としてみると,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta) \tag{13}$$

という式が得られますが,

$$\begin{aligned} (\cos\theta + i\sin\theta)^2 &= \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta \\ &= (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2i\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

となることに注意して, (13) 式の実部と虚部を比べてみると, 皆さん良くご存じの

$$\begin{cases} \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

という**倍角の公式**が得られます. 全く同様に, 一般の自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, (12) 式の左辺を展開して, 両辺の実部と虚部を比べてみることで, **n 倍角の公式**が得られることになります.

[6] 興味のある方は, 第 1 回の解説を参照してみて下さい.

5　問 3 の解答

(1) 与えられた関数が,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{14}$$

というように表わせるとします. このとき, (14) 式の両辺で, $x = 0$ としてみると,

$$f(0) = a_0$$

でなければならないことが分かります. よって,

$$a_0 = f(0)$$

でなければならないことが分かります.

　次に, (14) 式の両辺を微分してみると,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots \tag{15}$$

となることが分かりますが, (15) 式の両辺で, $x = 0$ としてみると,

$$f'(0) = a_1$$

でなければならないことが分かります. よって,

$$a_1 = f'(0)$$

でなければならないことが分かります.

　さらに, (15) 式の両辺を微分してみると,

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + \cdots \tag{16}$$

となることが分かりますが, (16) の両辺で, $x = 0$ としてみると,

$$f''(0) = 2a_2$$

でなければならないことが分かります. よって,

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

でなければならないことが分かります.

　より一般に, 勝手な自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して, (14) 式の両辺を k 回微分してみると,

$$f^{(k)}(x) = k! a_k + (k+1) \cdot k \cdots 2 a_{k+1} x + \cdots \tag{17}$$

となることが分かりますが, (17) の両辺で, $x = 0$ としてみると,

$$f^{(k)}(0) = k! \cdot a_k$$

でなければならないことが分かります. よって,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

でなければならないことが分かります.

(2) それぞれの関数 $f(x)=e^x, \cos x, \sin x$ に対して, $f^{(k)}(0)$ を計算して, $a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ を求めてみると,

$$\begin{cases} e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \\ \cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \\ \sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \end{cases}$$

となることが分かります.

以上の議論は, 余り厳密ではありません. **Taylor 展開**に対する第一段階の理解となればよいと思って出題してみました. きちんとしたことを知りたい方は, いくつか具体的な関数に対して Taylor 展開を試みるなどして, 少し感じが分かってから, 微積分学の教科書をじっくり読んでみると良いのではないかと思います.

6　関数とは

上で述べたように, 問 3 は, **Taylor 展開**に対する第一段階の理解になればよいと思って出題してみました. そこで, ここでは, **Taylor 展開とはどのようなことを考えているのか**ということについて, 少し説明してみることにします. そのために, まず, **関数**とは何であったのかということから反省してみることにします.「そんなシチ面倒臭いことを言われるのは嫌だ」と思われる方もいるかもしれませんが,「理解があやふやだな」と思うときには, **言葉の意味を自分で勝手に決めてかかっている**ということが理解を妨げる原因であることが案外多いものです. 皆さんも, 用語の意味が曖昧だなと思ったら, いつでも**定義に戻って考える**という癖をつけると, 数学に対する理解が深まることもあるのではないかと思います.

そこで, まず, **写像**とか**関数**とかいう言葉を少し説明してみることにします. **写像**とは何かということを数学の教科書などで調べてみると, **「集合 S から集合 T への写像 f とは, S の各元に対して, T の元を対応させる対応のこと」**とか書いてあるのではないでしょうか. このとき記号を用いて, 写像を $f: S \to T$ と表わしたり, S の元 $x \in S$ に対して, f により x が対応させられる T の元を $f(x) \in T$ と表わしたりします.

ここで, S の元を x と書いたのは深い意味はなくて, 気持ちは「S の元を何でも良いから勝手にひとつ持ってきなさい. でも名前がないと表わすのにちょっと不都合だから, 仮に x と呼んでみた」ということです. ですから, 別に「x」と呼ばなくとも,「y」と呼ぼうと「べ」と呼ぼうと何でも良いわけです. ただし, 皆が良く使う集合に対しては, なるべく共通の記号を使う方が, 他人とコミュニケーションを取る上では便利ですから, 例えば, 実数全体の集合や複素数全体の集合を, それぞれ, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ という記号を用いて表わすというように, **どのような数学的な対象を表わしているのかということが, できるだけ分かりやすいような記号が共通の記号として選ばれる**ことが多いわけです.[7]

さて, 上の写像の定義では, S や T は集合であれば何でも良いのですが, T として, 例えば, 実数の集合 $\mathbb{R}$ のような**「数の集合」**[8]を考えることもできます. このように, 写像の行

[7]英語で, 実数のことを real number, 複素数のことを complex number と言います.
[8]すなわち,「足し算」や「掛け算」などができる集合のことです.

き先の集合である T が「数の集合」である場合には, 写像のことを**関数**と呼びます. 正確には「S 上の実数値関数」などと呼ぶことで, S や T が何であるのかということを表わしたりもします. 普通, 皆さんが微積分学を学ばれる場合には, S が $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^n$ の開集合であることが多いのではないかと思います.[9]

以上が, 関数というものの一般的な定義なのですが, 以下では, $S = T = \mathbb{R}$ として, $\mathbb{R}$ 上の実数値関数だけを考えて, これを単に関数と呼ぶことにします. 我々は, こうした関数の性質をより良く理解したいと思うわけですが, 上で述べたように, **関数というのは, それぞれの実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, 実数 $f(x) \in \mathbb{R}$ をひとつずつ対応させるものであれば何でもよい**ということに注意して下さい. すると, 例えば, 円周率 π の少数点以下第 n 桁目の数字を c_n と表わすことにして,[10] $x \in \mathbb{R}$ が, 正の有理数で, 適当な自然数 $p, q \in \mathbb{N}$ を用いて,

$$x = \frac{p}{q}$$

というように既約分数[11]で表わせるときは,

$$f(x) = (c_p)^3 + 5^{c_q}$$

であり, その他の実数 $x \in \mathbb{R}$ に対しては,

$$f(x) = 0$$

となるような「奇妙な関数」も関数ということになります. それどころか, 値の決まり方に何の規則性もなく, 我々には到底言い表わすことすらもできないような「全く理解不能な関数」も関数の中にはたくさん存在しているわけです. こうした何の規則性もないような「一般的な関数」を理解することは, 我々には到底不可能なことなので, 普通, **微積分学**では,「近所」を「近所」に写すような**連続関数**や, 値の変わり方が唐突ではなく**「滑らか」に変わる**と思われる**微分可能な関数**などに考察の対象を絞って, そうした関数の性質をより良く理解しようと考えるわけです.

7 Taylor 展開とは

そこで, $f(x) = x^2 + 3x$ や $f(x) = e^x$ というような何度でも微分できる**滑らかな関数**を考えてみます. このとき, こうした滑らかな関数の中で最も理解しやすい関数が, $f(x) = x^2 + 3x$ のように, x のべき乗 x^n を使って表わせるような**多項式関数**であると考えられます. いま, 関数の定義域である S は $S = \mathbb{R}$ でしたから, S はそれ自体が数の集合です. したがって, S の元 $x \in S$ に対して, x を何度も掛けたり, 特定の実数を掛けたり, それらの結果を足し合わせたりすることで, 別な数を対応させることができます. こうしてできる関数が**多項式関数**であると理解することができます. このように多項式関数は数の対応のさせ方が極めて規則的であるために, 例えば,

$$f(x) = x^2 + 3x$$

[9] 開集合を考えるのは, 境界上の点など, 微分を考えるのが煩わしくなりそうな点を避けるためです.
[10] $\pi = 3.1415\cdots$ となりますから, $c_1 = 1$, $c_2 = 4$, $c_3 = 1$, $c_4 = 5$, $\cdots$ などとなります.
[11] すなわち, p と q が互いに素ということです.

であるとすると,

$$f(1) = 4,\ f(-2) = -2$$

であるというように, **関数自体の把握がとても容易である**と考えられます.[12]

そこで, **この分かりやすい多項式関数の力を借りて, 一般の関数の様子を理解することができないものだろうか**ということが考えられました. そのひとつの答が Taylor **展開**というもので, 勝手にひとつ与えられた滑らかな関数 $f(x)$ に対して, **関数 $f(x)$ を,**

Taylor 展開の問題意識

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f(x)} &= \boldsymbol{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k} \\ &= \boldsymbol{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots} \end{aligned} \tag{18}$$

というように「多項式の姿」に「化かす」ことで, 理解が容易な「多項式の姿」を通して関数の様子を理解することができないだろうかということが考えられました.

ここで, (18) 式の右辺に「次数が有限の普通の多項式」ではなく「次数が無限大の多項式」が登場したことが気に掛かる方がいるかもしれません. そこで, 問 3 で行なった議論を見返す前に, この点について少し考えてみることにします. 上でも述べたように, **Taylor 展開のアイデア**とは, **一般の関数を「多項式の姿」に「化かす」**ということにあります. そこで, 例として, 皆さん良くご存じの三角関数 $f(x) = \sin x$ が「多項式の姿」に「化ける」かどうかを考えてみます. このとき,「多項式の姿」というのを文字通り解釈すると,

$$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{19}$$

となるような自然数 $n \in \mathbb{N}$ や係数 $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ が見つかるかということになります. ところが, このような多項式は存在しないということが, 例えば, 次のようにして分かります.

いま, (19) 式の両辺に現われる関数の零点を考えてみます. すると, 左辺の $\sin x$ の零点は $\{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots\}$ という無限集合になることが分かります. 一方,「代数学の基本定理」により, n 次の多項式の零点は複素数の範囲でも高々 n 個しか存在しませんから, (19) 式の右辺の零点は高々 n 個しか存在しないことが分かります. もし, (19) 式のように二つの関数が一致するとすれば, 当然それらの零点も一致するはずですから, **(19) 式を成り立たせるような多項式は存在しない**ことが分かります. したがって, **無限個の零点を持つ $\sin x$ が「多項式の姿」に「化ける」かどうかを問題にしようとすれば, 最初から「次数が無限大の多項式」を考察しなければいけない**ことが分かります. すなわち, 次数が有限の多項式しか考えないとすると, 多項式関数以外の関数を「多項式の姿」で表わすことはできないわけですが, **「次数が無限大の多項式」も考えることにすると, 多項式関数以外の関数も**

[12] これとは対照的に, 上で挙げた円周率 π の少数点以下の数字を用いて定義された関数

$$f(\frac{p}{q}) = (c_p)^3 + 5^{c_q}$$

を考えてみると, 例えば,

$$f(\frac{151}{203}) = (c_{151})^3 + 5^{c_{203}}$$

がどんな値になるのかさっぱり分かりません.

「多項式の姿」で表わすことができるのではないかと考えてみるというのが Taylor 展開における基本的なアイデアです.

そこで, このような「上手いこと」が起こっていると仮定すると, (18) 式の右辺の各係数 $a_k \in \mathbb{R}$ は, 関数 $f(x)$ から何らかの形で定まるのではないかと思われますが, この係数 a_k として, どのような数が「もっともらしい」のかということや, 指数関数や三角関数が, どのような「多項式の姿」に「化ける」ことが期待できそうなのかということを考えてみて下さいというのが, 問 3 の問題の意味です.

そこで, 試みに, (18) 式において, $x = 0$ として両辺の値を比べてみると,

$$a_0 = f(0)$$

となることがもっともらしく思われます. 次に, a_1 ですが, (18) 式の右辺は, その意味付けがまだハッキリしないものの,「何度でも微分できそうな顔」をしていますから, 取りあえず項別微分できると仮定してみることは悪くなさそうです. そこで, (18) 式の両辺を微分してみると,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots \tag{20}$$

となりそうなことが分かりますから,[13] 再び, $x = 0$ として, (20) 式の両辺の値を比べてみると,

$$a_1 = f'(0)$$

となることがもっともらしく思われます. 以下同様に考えると, 勝手な自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

となることがもっともらしく思われます. すなわち, **(18) 式の右辺の「無限和」の意味が何であれ, $f(x)$ が「多項式の姿」に「化ける」とすれば, それは,**

Taylor 展開の形に「当たり」をつける

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f(x)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots \end{aligned} \tag{21}$$

という形になることが, 一番もっともらしいというわけです. こうして**滑らかな関数が「多項式の姿」に「化ける」としたら, どのような姿に「化ける」のが一番もっともらしいのか**ということに関する予想が付きました.

これでは抽象的で何を言っているのか分からないと思われる方は, 次のように考えてみて下さい. いま, 試みに, $f(x) = \sin x$ という関数を取ってきてみます. このとき, 三角関数 $\sin x$ が,

$$\sin x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \tag{22}$$

[13] ここで, (20) 式の右辺の微分を考えるときに, 単に各項を順番に微分しました. このように,「関数の無限和」に対して, 各項を順番に微分してその和を考えることを**項別微分**すると言います.

というように「多項式の姿」に「化ける」とすると, **係数 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ としてどのような値がもっともらしいのか**ということを考えてみます. そこで, (22) 式において, $x = 0$ として両辺の値を比べてみると,

$$a_0 = 0$$

となることがもっともらしく思えます. 次に, (22) 式の両辺を x で微分してから, $x = 0$ としてみると,

$$a_1 = 1$$

となることがもっともらしそうです. 以下同様に考えると, 三角関数 $\sin x$ は,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

という姿に「化ける」のがもっともらしく思われます.[14]

次に, $f(x) = e^x$ という関数を取ってきてみます. このとき, 指数関数 e^x が,

$$e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

というように「多項式の姿」に「化ける」とすると, 係数 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ としてどのような値がもっともらしいのかということについて同様の考察をしてみます. すると,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

という姿に「化ける」のがもっともらしいことが分かります.[15]

このように, 係数 $a_0, a_1, a_2, \cdots \in \mathbb{R}$ の**「値自体」**を考えると, $f(x) = \sin x$ に対しては,

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{3!}, \quad a_4 = 0, \quad \cdots$$

となり, $f(x) = e^x$ に対しては,

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2!}, \quad a_3 = \frac{1}{3!}, \quad a_4 = \frac{1}{4!}, \quad \cdots$$

となるというように, **関数 $f(x)$ の形に依って係数の値は変わります**. ところが, **「値の決まり方」**に注目すると, **関数 $f(x)$ の具体的な形には依らずに, 常に,**

$$\boldsymbol{a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}}$$

という形で定まることが分かります.

このように, **個々の関数の具体的な形に依らずに, どのような関数に対しても成り立つような「普遍的な法則」を曖昧さなしにハッキリと表現する**ために, 数学では, **「抽象化」という工夫**が行われてきました. 今の場合も, 「勝手な関数 $f(x)$ に対して, 関数 $f(x)$ が,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

[14] 皆さん, 確かめてみて下さい.
[15] 皆さん, 確かめてみて下さい.

というように「多項式の姿」に「化ける」とすれば, その係数は,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

となることがもっともらしい. 」と言うことで, 係数 a_k の**「具体的な数値」**を表現しているというよりは, 関数 $f(x)$ として何を取ってきても, **係数 a_k は「$f(x)$ の k 階導関数 $f^{(k)}(x)$ の 0 での値 $f^{(k)}(0)$ を $k!$ で割ったもの」として定まる**という**「共通の決まり方」**を表現しようとしているわけです.

このような**記号を用いた抽象的な表現**は, 関数 $f(x)$ の具体的な形に惑わされずに, **数学の法則**を曖昧さなしにハッキリと表現するのにとても便利なのですが, 慣れないうちは「ひどく抽象的だ」という印象を与えてしまうかもしれません. そこで, 皆さんも「抽象的だ」と思われるときには, 是非, 上でやったように, **具体例を自分でひとつ取ってきて,「その具体例について何を主張しているのか」ということをじっくり考えてみて下さい**. そのように具体例をもとに理解を進めて行くと,「これは他の例でもこうなっているはずだ」という**一般的な法則**の存在にハタと気が付くこともあるのではないかと思います. それを表現しようと思ったときに, **記号を用いた抽象的な表現**がとても便利なことが納得できるかもしれません.

前に述べたように, **Taylor 展開**に関する正確な事柄については, 微積分学の教科書などを参照して欲しいのですが,「次数が無限大の多項式の姿」を考えるときに, 何が一番気に掛かるのかということについて, 一言注意しておくことにします. それは, (21) 式の右辺は**「無限和」**なので, 変数 x のところに, $x = 1$ など, 具体的な数字を入れたときに, **右辺の「無限和」の値がきちんと定まるのか**ということです. 例えば,

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

という関数を考えると, $f(x)$ は,

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \tag{23}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$
$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \tag{24}$$

という「多項式の姿」に「化け」そうなことが分かります.[16] このとき, $f(x)$ に対する (23) 式という表示では,

$$f(2) = -1$$

となるのに対して, (24) 式の表示では,

$$f(2) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots$$

となってしまいますから, こちらの表示では値が定まらないことになります. 一般には, このような「変なこと」が起こり得ますから, **どのような実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, (21) 式の**

[16] 皆さん, 確かめてみて下さい.

右辺の「無限和」の値が意味を持つのかということや, **そのとき, その「無限和」の値は $f(x)$ という値と一致するのか**ということをきちんと理解することが大切になります. 問 3 で見たような指数関数や三角関数のときには, 実は, すべての実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, (21) 式の右辺の「無限和」が意味を持ち, 元の関数の値を再現するということを示すことができます.[17]

Taylor 展開は, 実用上, とても便利であるだけでなく, 微積分学全体の理解を深める上でも, さらには, 線型代数学の理解を深める上でも, 重要な役割を果たします. ですから, 皆さんも, いくつか具体的な関数に対して, その関数を「多項式の姿」に「化かす」ことを試みるなどして, 少し感じをつかんでから, ここで述べたような基本的な考え方を念頭に置いて, 今のうちに微積分学の教科書で Taylor 展開が説明してある部分を読んでみると良いのではないかと思います.

8　問 4 の解答

(1) 問 3 の (2) で見たように, 滑らかな関数が, 例えば,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \tag{25}$$

というように「多項式の姿」に「化ける」とします. すると, (25) 式の右辺には,「足し算」や「掛け算」しか登場していませんから, この「多項式の姿」を用いることで, **変数 x のところに, 実数だけでなく, 複素数や行列などの「数」を代入して考える**こともできそうです. そこで, 我々も, 勝手な複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して, $e^z \in \mathbb{C}$ を,

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \tag{26}$$

という「無限和」で定義してみることにします.[18]

このとき, $\theta \in \mathbb{R}$ として, 特に, $z = i\theta \in \mathbb{C}$ という純虚数を代入したときに, $e^{i\theta}$ を実数部分と虚数部分に分けて, $\cos\theta$ や $\sin\theta$ の Taylor 展開の式と比べてみると,

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

となることが分かります.

(2) (1) の結果と三角関数の加法定理を用いると,

$$e^{i(\theta+\varphi)} = \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)$$

[17] これらの事実についても, 微積分学の教科書を参照して下さい.

[18] 本当は, 勝手な複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して, (26) 式の右辺の「無限和」の値がきちんと定まることを確かめないといけませんが, ここでは, 取りあえず, このことは事実として認めることにします. 気になる方は, 微積分学の教科書を参照してみて下さい.

$$= (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi) \tag{27}$$

となることが分かります. 一方,

$$\begin{aligned} e^{i\theta}\cdot e^{i\varphi} &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi) \end{aligned} \tag{28}$$

となることが分かりますから, (27) 式, (28) 式から,

$$e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}\cdot e^{i\varphi}$$

となることが分かります.

問 2 の (1) では, **φ 回転してからさらに θ 回転するのは, 一度に $(\theta+\varphi)$ 回転するのと同じことである**という事実から,「三角関数の加法定理」を導くことができることを見ましたが, ここでは,

指数関数の加法定理

$$\boldsymbol{e^{x+y} = e^{x}\cdot e^{y}} \tag{29}$$

という「指数関数の加法定理」が, x, y を複素数の範囲に拡張して考えても成り立っているということの帰結として,「三角関数の加法定理」を導くこともできるということが分かりました. 興味がある方は,

$$e^{x+y} = 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \cdots$$

と

$$e^{x}\cdot e^{y} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots\right)$$

という二つの式を x, y のベキの形に展開して,

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{k,l}x^k y^l$$

という形に表わしたときに, それぞれの式で $x^k y^l$ の係数 $a_{k,l}$ がどうなるのかということを比較してみることで, 勝手な複素数 $x, y \in \mathbb{C}$ に対して, (29) 式が成り立っていることを確かめてみて下さい.

(3) (2) の結果を用いて, 数学的帰納法により証明することができます.[19] また, この式と問 2 の (3) の式とは同じものであり, **n 倍角の公式**を表わしているということも確認してみて下さい.

[19] 皆さん, 確かめてみて下さい.

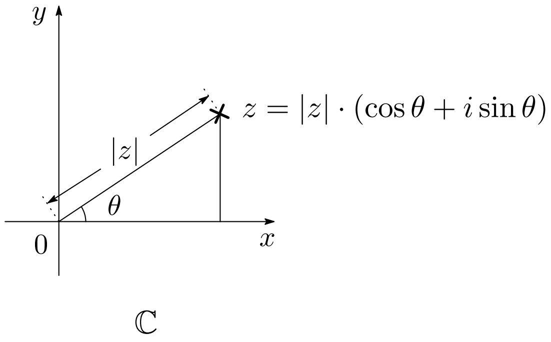

図 1: 複素数 $z \in \mathbb{C}$ が x 軸となす角度を $\theta \in \mathbb{R}$ とすると, z は $z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$ と表わすことができる.

9　問 4 を見直すと

さて, 一般の複素数 $z \in \mathbb{C}$ は, 図 1 のように角度 $\theta \in \mathbb{R}$ を定めると,

$$z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$$

と表わすことができますから, 問 4 の結果から,

$$r = |z| \in \mathbb{R}_{\geq 0} = \{ r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0 \}$$

として,

複素数の極表示

$$\boldsymbol{z = re^{i\theta}} \tag{30}$$

というように表わせることが分かります. これを, 複素数 $z \in \mathbb{C}$ の**極表示**と呼びます. 第 1 回の問 3 の (2) のところでは, $z^3 = 1$ となるような複素数が, 単位円周上の三等分点で与えられることを見ました. そこで, ここでは, (30) 式の極表示を用いて, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $z^n = 1$ となるような複素数をすべて求めてみることにします.

いま, $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ が,

$$z^n = 1$$

を満たすとします. このとき, 問 4 の (3) より,

$$\begin{aligned} 1 &= z^n \\ &= (re^{i\theta})^n \\ &= r^n (e^{i\theta})^n \\ &= r^n e^{in\theta} \end{aligned} \tag{31}$$

となることが分かります. そこで,

$$e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

は絶対値が 1 の複素数であるということに注意して, (31) 式の両辺の絶対値を取ってみると,

$$r^n = 1$$

となることが分かります. すると, $r \geq 0$ でしたから,

$$r = 1 \tag{32}$$

となることが分かります. よって, (31) 式, (32) 式から,

$$\begin{aligned} 1 &= e^{in\theta} \\ &= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \end{aligned} \tag{33}$$

となることが分かりますが, (33) 式の実部と虚部を比べてみると,

$$\begin{cases} \cos(n\theta) = 1 \\ \sin(n\theta) = 0 \end{cases} \tag{34}$$

となることが分かります. したがって, (34) 式から, $m \in \mathbb{Z}$ を勝手な整数として,

$$n\theta = 2\pi m$$

となることが分かりますから,

$$\theta = \frac{2\pi m}{n}$$

となることが分かります.

逆に, $m \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\theta = \frac{2\pi m}{n}$$

であるとすると, (34) 式が成り立つことが分かりますから,

$$\begin{aligned} (e^{i\theta})^n &= e^{in\theta} \\ &= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \\ &= 1 \end{aligned}$$

となることが分かります.

以上から, $z^n = 1$ となるような複素数[20] $z \in \mathbb{C}$ は,

1 の n 乗根

$$\boldsymbol{z = e^{\frac{2\pi m i}{n}}, \quad (m \in \mathbb{Z})}$$

で与えられることが分かりました. これらの複素数を複素平面上に描いてみると, **一般に, $\boldsymbol{z^n = 1}$ となるような複素数は単位円周上の $\boldsymbol{n}$ 等分点で与えられる**ことが分かります (図 2 を参照).

[20] このような複素数を **1 の $\boldsymbol{n}$ 乗根**と呼びます.

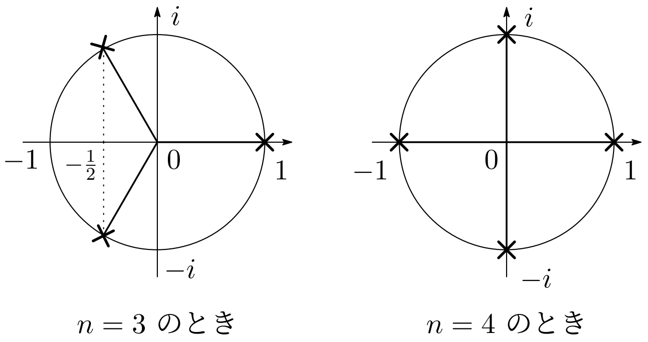

図 2: 一般に, $z^n = 1$ となるような複素数は, 単位円周上の n 等分点で与えられる.

10　Taylor 展開の利点

問 3 のところで見たように, Taylor 展開とは, 滑らかな関数を「多項式の姿」に「化かす」ことにより, 理解が容易な「多項式の姿」を通して関数の性質をより良く理解しようとするものです. こうした Taylor 展開の考え方を用いると, 例えば,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

という表示を用いて, $x \fallingdotseq 0$ のとき,

$$e^x \fallingdotseq 1 + x$$

と近似してみることで, $e^{0.15} \fallingdotseq 1.15$ 位だろうなどと当たりをつけることができたりします.[21] このように, Taylor 展開は近似計算をするときにとても役立つわけですが, Taylor 展開を考えるということの利点は, 単に, 近似計算に役立つということだけではありません.

問 4 の解答の最初でも述べたように, 関数 $f(x)$ が,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots \tag{35}$$

というように「多項式の姿」に「化ける」とすると, (35) 式の右辺には「足し算」と「掛け算」しか登場していませんから,「足し算」や「掛け算」ができるような「数」であれば, 何でも変数 x のところに代入して考えることができそうです. このように, Taylor 展開には, **関数 $f(x)$ に対して, 変数 x のところに実数以外の「数」を代入して考えることを可能にする**という大きな利点もあります.

例えば, 3 を 2 乗したり 3 乗したりして, $3^2 = 9$ や $3^3 = 27$ が得られるということは, 皆さん納得されるのではないかと思いますが, 誰かが「では, 3 を $\sqrt{-1}$ 回掛けたらどうなりますか. 」とか, 例えば,

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

[21] もちろん, $e^x \fallingdotseq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ というように, さらに高い次数の方まで考えることにすれば, 近似の精度はより良くなります.

として,「5 を X 回掛けてみましょう.」とか言ったとしたら, 皆さんは, この人は「危ない人」だと思うのではないでしょうか. しかし, **こういうことを真面目に考えて, 物事をより良く理解しようと勤めるのが数学者 (もしくは, 皆さんのような数学を学ぼうという方) の「正しい態度」です**.

そこで,

$$f(x) = e^x$$

という指数関数を考えてみることにします. すると, $f(2) = e^2 = e \cdot e$ は e を 2 回掛けたもの, $f(3) = e^3 = e \cdot e \cdot e$ は e を 3 回掛けたものというように, 普通は, $f(x) = e^x$ とは e を x 回掛けたものであると思っているわけです. したがって, 変数 x のところに, 例えば, $x = \sqrt{-1}$ などを代入することができれば, **e を $\sqrt{-1}$ 回掛けてみることができる**わけです. ところが,

$$f(\sqrt{-1}) = e^{\sqrt{-1}}$$

という「姿」をじっといつまで見つめていても, $e^{\sqrt{-1}}$ とは何者なのか, なかなか見当も付きません. そこで, **Taylor 展開を用いて, $f(x) = e^x$ を「多項式の姿」に「化かす」ことを考えてみます**. すると, 問 3 で見たように, $f(x)$ は,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \end{aligned}$$

という姿でも表わすことができるのでした. こうした「多項式の姿」で眺めてみると,

$$f(\sqrt{-1}) = 1 + \sqrt{-1} + \frac{(\sqrt{-1})^2}{2!} + \frac{(\sqrt{-1})^3}{3!} + \cdots$$

となりますから, 今度は $f(\sqrt{-1})$ という値が何やら意味がありそうに見えてきます.

このように, **Taylor 展開を用いて関数を「多項式の姿」に「化かし」て考えてみると, 「足し算」や「掛け算」のできるものであれば, 何でも変数 x のところへ代入して考えることができそうな気がしてくる**わけです. 例えば「 3 を $\sqrt{-1}$ 回掛ける」といったように, 安直に考えると意味をなさないようなことが, **Taylor 展開を通してきちんと意味付けできる**ことになります.[22] 複素数は「足し算」や「掛け算」ができますから, **Taylor 展開を通して, 複素数を $f(x) = e^x$ に代入することができます**. このとき, 問 4 で見たことは, 実数の範囲だけで考えていたのでは何の繋がりも感じられなかった**指数関数**と**三角関数**は, 複素数の範囲まで定義域を拡張して考えることで, 実は, **本質的に同じ関数である**ということが分かるということでした. また, **「三角関数の加法定理」とは「指数関数の加法定理」**[23]**を複素数の範囲まで拡張したものに他ならない**ということも分かるのでした.

このように数の概念を拡張したり, 関数の概念を拡張したり, 様々な数学的な概念を拡張して物事を眺めることにより, 物事のより良い理解を目指そうとして数学は発展してきています. その意味で, **より良い視点の発見**ということが, 数学の発展の命になっていま

[22] 本当は, Taylor 展開は**「無限和」**ですから, **きちんと値が定まる**ということを確かめるためには, **「部分和」からなる数列が極限を持つ**ということをきちんと確かめる必要があります.

[23] すなわち,「$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$」という等式のことです.

す. ちなみに, 最近では, 上の Taylor 展開のような展開式の変数 x のところに,「空間」を代入して考えることにとても意味があるのではないかと考える「ちょっと危ない人達」も, 数学者や物理学者の中に少しずつ増えつつあります.