数学 II 演習 ( 第 1 回 )

問 **1.** $i$ 行 $j$ 列の行列成分 $a_{ij}$ が, $a_{ij} = i + 2j$ で与えられる 4 行 4 列の行列 $A$ を具体的に書き表わせ.

問 **2.**

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, $A^n$, $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, $A^n$, $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ.

♠ 余裕があれば, $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & a \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{m\text{ コ}}$ でも考えてみよ.

• 実数 ( real number ) 全体の集合を $\mathbb{R}$ と表わし, 複素数 ( complex number ) 全体の集合を $\mathbb{C}$ と表わす.

問 **3.** $z = x + yi \in \mathbb{C}$ を複素数とする. すなわち, $x, y \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$ とする. また, 複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して, $z$ の複素共役 $\bar{z} \in \mathbb{C}$ を $\bar{z} = x - yi$ という式により定め, $z$ の絶対値 $|z|$ を $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ という式により定める. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ となることを確かめよ.

(2) $z^3 = 1$ となる複素数 $z \in \mathbb{C}$ をすべて求めよ. また,

$$\mathbb{C} \ni z = x + yi \;\longleftrightarrow\; (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

という対応により複素数を平面 $\mathbb{R}^2$ 上の点と思うとき, これらの点を図示せよ.

(3) 複素数 $z_0 = a + bi \in \mathbb{C}$ を, 勝手にひとつ取ってきて, $f_{z_0}(z) = z_0 z$ という式によって与えられる写像 $f_{z_0} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を考える. このとき, $z = x + yi$, $f_{z_0}(z) = x' + y'i$ と表わすと, $(x', y')$ は, 2 行 2 列の行列 $A_{z_0}$ を用いて,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A_{z_0} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

という形に表わすことができることを示せ. ( すなわち, $A_{z_0}$ を具体的に求めてみよ. )

(4) さらに, (2) と同様に, $z_0 = a + bi \in \mathbb{C}$ を $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ という平面上の点と同一視して, $(a, b) = (\,|z_0| \cdot \cos\theta, |z_0| \cdot \sin\theta\,)$ と表わすと, $A_{z_0}$ は,

$$A_{z_0} = |z_0| \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

と表わせることを確かめよ.