2007年度数学I演習補足解説

実数の構成

理II・III 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7組

5月10日 清野和彦

前書き

いろいろな教科書を眺めてみても実数の構成の書いてあるものは非常に少なく、積極的に書かれている本は小平邦彦のものくらいで、解析概論などは、本当は書く必要がないけど19世紀の伝統 (!) に従って一応付録に書いておく、と断った上で書かれています。解析概論が出版されたのは1938年ですから、既に70年ほど前でさえ実数のことは認めて微積分を始めるのが普通だったのです。ましてや21世紀の現在、実数の構成を扱う教科書や講義は（それを論じるための本や講義でない限り）ほぼ絶滅したと言ってよいでしょう。

講義で実数論を扱わなくなった理由は、高木貞治が言うように「扱う必要がないから」というのもありますが、「扱っていると微積分の本当に大切なところの扱いが軽くなってしまうから」というのが最も大きな理由でしょう。しかし、皆さんはたまたま実数論を扱う講義に当たっています。ということは、どういうことになるでしょう?[1]

というわけで、演習の時間には1年生の微積分で最も重要だと（私が）思うところを取り上げ、講義内容については（できる限り）このような補足プリントで補って行こうと思います。ただし、言い訳めいていて恐縮ですが、**講義や教科書より演習の補足プリントの方が分かりやすいとは限りません**。「分かりやすい説明」は説明される人によって違うからです。補足プリントは説明の種類を増やすために配るものと思ってもらえると助かります。なお、このプリントでは「なぜ切断なんていうものを考えなきゃならないのか」の説明に重点を置き、それらが大小関係や四則演算を持つことについては通り一遍の説明しかしていません[2]。そのつもりで読んでいただけると幸いです。

[1]誤解のないように書き添えておきますが、私にはそのような講義を批判する気は毛頭ありません。ただ単に私とは考えが違うというだけです。今は数学教育の過渡期であり、誰もがどのように講義をするのがよいか手探りの状態にあります。そんな中で実数の構成を扱うのは少数派になったというだけなのであって、だから良くないということには決してなりません。たまたま巡り合わせで全く考えの違う二人の教員が講義と演習を担当することになったのだから、無理に一方を他方に合わせるのではなくそれぞれの考えで進めた方が、講義と演習の少なくとも一方とは相性が合うという学生さんの人数を増やせるのではないかと考えているのです。

[2]しかも、書いているうちに時間がなくなってしまったので、後半に行くほど説明が雑になって行きます。読み進むうちにだんだん理解しにくくなってきたとすると、題材が難しくなったせいではなく私の説明が雑になったせいかもしれません。

それから、「毎回（できるだけ）補充問題を配付する」と言いましたが、このプリントの話題については、殊更そのための問題を解いてみる必要があるとは思えなかったので付けませんでした。どうしても問題を解きたい人は、「性質」や「定理」を証明を見ずに自力で考えてみてください。（必要ないとは思いますが）よい練習問題になります。

1　このプリントを読むときの「心構え」について

「特別な心構えを読者に要求するとは何と不遜な!」とお怒りかも知れません。言い訳はやめて、とにかく説明してみます。

このプリントの目的は「有理数から実数を作ること」です。皆さん実数はよくご存知で、このプリントで作る実数も皆さんの知っているものと同じものです。しかし、「私の知っている実数をどうやって作ってくれるのかお手並み拝見」という気持ちで読むと混乱すると思います。そうではなくて、**整数と分数以外の数はすべて忘れてしまったという記憶喪失状態**で読んで欲しいのです。小数は知らないか知っているとしても有限小数だけにして下さい。大体、小学校 4, 5 年生くらいの知識（＋負の数）まで頭を巻き戻して欲しいのです。ただし、**精神的には大人**でないと訳がわからなくなります。

例として、自然数から分数を作る作り方を取り上げてみます。初めて分数を学ぶときには、

> ここに 1 メートルの紙テープがあります。これをピッタリ二に折っちゃうと何メートルになるかな? うーん、確かに 50 センチメートルなんだけど、先生はどうしてもメートルで言いたいんだぁ。実は、こういうときに便利な数があるのです。1 メートルのテープを同じ長さの二本のテープに分けたので、「2 分の 1 メートル」って言うのです。「分の」なんて数らしくないから $\frac{1}{2}$ と書きます。

という感じでやるのだと思いますが、このプリントのスタンスだと、

> 2 を掛けると 1 になる数は存在しない。なぜなら、数は自然数しか存在しないから。それなら、そういう数が存在するとしてみたらどうだろうか? 何か不都合が起こるだろうか? そうだ、実際に作ってしまえばよいのだ。といっても、そういう数は今は存在しないのだから、今の私には**数とは思えないものの中から探し出さなければならない**。まず、「2 を掛けると 1 になる数」であることがわかるように作らなければならないから、うーん、とりあえず安直に $\langle 1, 2\rangle$ というふうに並べてみよう。$\langle 1, 2\rangle$ はもちろん数ではない。数を使って作ってあるが、ただの記号に過ぎない。なにせ、今のところ数は $1, 2, 3, \ldots$ というもの

だけで、私が初めてそれ以外の数を作って見せようとしているのだからな。

しかし、数というからには、今までの数である自然数も仲間に入っていなければならないし、大小関係や足し算や掛け算ができて、自然数の部分に制限すれば今までと同じになっていなければ困るよな。とにかく、大小関係などを作ってみて、それが上手く目指す性質を満たしているかどうかは後で確かめることにしよう。

まず、大小関係から。しかし記号に過ぎないものに大小関係を作れといわれてもなぁ。そうだ、記号とはいえ中身は自然数二つなんだから、自然数の大小関係を利用すれば上手くできるんじゃないだろうか。例えば $\langle 1,2\rangle$ と $\langle 1,3\rangle$ のどちらが大きくあるべきか? 2 倍して 1 になるのと 3 倍して 1 になるのと比べたら 2 倍して 1 になる方が大きくあるべきだよな。でも $\langle 1,2\rangle$ と $\langle 2,3\rangle$ だとどうだ? 2 倍して 1 と 3 倍して 2 なら 3 倍して 2 の方が大きくあるべきだ。それじゃ、$\langle k,l\rangle$ と $\langle m,n\rangle$ に対して、

$$\langle k,l\rangle \text{ の方が } \langle m,n\rangle \text{ より大きい} \Leftrightarrow\ kn > ml$$

で定義しよう。云々云々 ...

という感じの「抽象的」な作り方です。手持ちの「数でないもの」（上の例では数を二つ並べたもの）に上手く数としての資格を与えようというわけです。だから、出来上がった新しい数そのものはどう見ても数には見えません。そういう作り方です。だから「知識は小学生だが精神は大人」という心構え（頭構え?）で読んで欲しいわけです。

2　有理数と直線

前節の「自然数から分数を作る話」の指導原理は

どのような二つの自然数 m,n に対しても n 倍すると m になる数が存在すること、

つまり、

割り算が自由にできること

でした。それでは、本題である「有理数から実数を作る話」の指導原理は何かというと、

数直線が幾何学的な直線と一致すること

です。

我々にとって、直線は有るとか無いとか言うのが馬鹿らしい程明らかな存在でしょう。そして、数直線という言葉によって直線と実数とが同等の概念であると信じてきました。しかし、実数という概念を微積分で用いるとき、この明らかさだけでは話が曖昧になってしまうのです。そこで、**明らかだと思っていた性質とは何なのか**ということと**実数は本当にその性質を持つのか**という問題にはっきり答えるために、有理数から実数を作ってみようというわけです。

そのために、まず有理数のみでできている数直線では何が困るのか、幾何学的な直線に比べて足りないのはどのような性質なのかを考えてみましょう。

有理数直線で幾何学、つまり図形を考えるとまずいのは、例えば、正方形の対角線がなくなってしまうことです。実際、もし対角線があるとすると、その長さと正方形の一辺の長さとの比は二乗すると 2 になる数でなければならず、ご存知のようにそのような有理数は存在しないからです。つまり、正方形の隣り合わない二頂点を通る直線は存在しないことになってしまい、「相異なる二点を通る直線がただひとつ存在する。」という幾何学としては当たり前のことが成り立たなくなってしまいます。

一方で、有理数を直線と思うことは、整数を直線と思うよりは我々の直線のイメージに近いことは確かでしょう。では、有理数と整数の、直線と思うときの違い[3]はなんでしょうか？有理数直線では勝手な 2 点の間に必ず別な点がありますが、整数直線だとそうはいかないことでしょう。つまり、悠里数直線の場合、どんなに短い線分をとっても、その上に端点以外の点が存在するというところは幾何学的な直線のイメージに合っています。

上の二つのことをまとめると、

> 有理数は、我々のイメージする直線の上に**「隙間なく」並んでいる**ものの、**足りない点がある**

という、訳の分からないことになります。訳は分からないけれども、上記のような考察を正しいものと考える以上このことを受け入れざるを得ません。だから、我々の目標は

> 幾何学的な直線から有理数を取り除くと「幅のない隙間」が沢山残るので、それらの「幅のない隙間」を「ひとつひとつ」バラバラにして、それらどうしやそれらと有理数の足し算やかけ算や大小関係を上手く作る

ことです。それができれば、有理数とその新しい「数」の全体が幾何学的な直線とピッタリ一致する数直線を実現してくれるでしょう。

---

[3]「計算ができる数としての違いではなく」という意味です。「計算ができる数としての違い」は、有理数は割算ができるが、整数はできるとは限らないことです、当然。そうは言っても、直線としての違いもこのことから出てくるのですが。

というわけで、次の節ではどうやって「幅のない隙間」を「ひとつひとつ」取り出すか、その取り出し方を説明します。

3 デデキント切断

「幅のない隙間」を「ひとつひとつ」取り出す方法にいくつかあるのですが、上に述べた直線のイメージに最も馴染む方法が、**デデキント切断**[4]による方法です。

デデキント切断の考え方は、直線の点を、直線からその点を取り除いた残りで特徴付けようというものです。なぜ直接その点を取り出さずに残った方で考えるのかというと、有理数しか手持ちの数がないので、幾何学的な直線の点のうち有理数直線に乗らなかったものには対応する数がない（それを作ろうとしている）わけですから、直接その点を名指しすることができないからです。これから点を一つ一つ取り出そうとしている直線をまな板の上の長葱のように横たえておき、それを包丁で切るように別な直線を縦に交わらせることをイメージしてください。前節の考察から、交点（切り口）は有理数だったり「幅のない隙間」だったりするわけです。その交点（切り口）を数にしたいわけですが、切り口そのものを直接扱えないので、切られた直線（長葱）の「切られ具合」で切り口を特定しようと考えるわけです。

「切られ具合」をどうやって手持ちの道具（有理数）で表現するかを説明しましょう。直線（長葱）は交点（切り口）から「左右」二つに分断され、それに伴って直線上の有理数も同様に二つの集合に分かれます。交点が有理数に当たっているなら、その点は後に残った有理数達の作る二つの集合のうち、一方の組の最大数、他方の組の最小数であり、交点が上で述べた「幅のない隙間」だったとしたら、二つに分かれた直線上にすべての有理数が残っており、どちらにも最小や最大の有理数はないということになります。このようにして有理数直線上の「幅のない隙間」を取り出そうというわけです。

正確な定義を書きましょう。有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$ で表すことにします。

[4]デデキント（Dedekind）は 19 世紀後半から 20 世紀初頭にかけて活躍したドイツ人数学者です。このプリントで説明する実数の作り方はデデキントの考えたものです。つまり、その時代に「実数とは何か」が問題になり、デデキントがそれに一つの解答を与えたというわけなのです。デデキントは ‘Schnitt’ という言葉を使っています。辞書によると、「切ること、切断」という意味の次に「切れ目、切り込み」というのも出ていて、こちらの方がピッタリくるのですが、一応慣習に従って切断にしておきます。

デデキント切断

有理数の全体 $\mathbb{Q}$ を、次の条件を満たす空でない二つの部分集合 A と A' に分けたとき、その部分集合の組 $\langle A, A' \rangle$ を有理数の**デデキント切断**あるいは単に有理数の**切断**、面倒なので誤解の生じ得ないときには簡単に**切断**と言う。

1. $A \cup A' = \mathbb{Q}$。
2. 任意の a, a' (ただし $a \in A$, $a' \in A'$) に対し、常に $a < a'$ が成り立つ。
3. A' は最小数を持たない[5]。

交点が有理数のときは、その点を値が小さい方の組へ入れてしまうわけです。なお、条件 2 から $A \cap A' = \emptyset$（空集合）が成り立っていることに注意してください。

A を**下集合**、A' を**上集合**と呼ぶことにしましょう。A と A' は互いに他の補集合（もちろん $\mathbb{Q}$ における）ですから、どちらかが決まれば切断 $\langle A, A' \rangle$ も決まります。そこで、具体例は上集合か下集合のどちらかしか書きません。また、記号が長くならないようにするために、$\langle A, A' \rangle$ を $\boldsymbol{A}$ というように、下集合の文字を太くしたもの一文字で表すことにします。

実例で考えてみましょう。例えば、交点が $\frac{13}{58}$ に当たる点だったとすると、それの決める切断 $\boldsymbol{A}$ は

$$A = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \tfrac{13}{58}\right\}$$

で、これは A に最大数があります。一方、

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \text{ または } x^2 \leq 2\}$$

とすると $\boldsymbol{B}$ も切断ですが、この場合 B に最大数がないので、交点は有理数でなく「幅のない隙間」の「ひとつ」だというわけです。

我々は、この $\boldsymbol{B}$ の様なものを「数」だと思って有理数と一緒にしたいのですが、「有理数の集合の組」と「有理数」を一緒に混ぜて考えるのはいかにも混乱しそうなので、上の $\boldsymbol{A}$ の様なものも引っ括めた切断全体を考えることにし、その上で $\boldsymbol{A}$ のような上集合に最小数のある切断を有理数と同一視できるような数としての資格 (四則演算、大小関係) を切断全体の集合に与えることにしましょう。

その前に、当たり前だが定義には直接書いていない切断の性質を補題として証明しておきます。

補題 1. x を有理数とする。$x \leq a$ となる A の元 a が存在するなら $x \in A$ であり、$x \geq a'$ となる A' の元 a' が存在するなら $x \in A'$ である。

[5] 講義や教科書では「A に最大数がない」を採用していることにかなり書き進めてから気がつきました。大変申し訳ないのですが、修正している時間がないのでこのままにしておきます。なお、このプリントの切断の定義の方が「掛け算」の定義が少しだけきれいになると思います。

証明. 直線の図を書いてみれば明らかと言いたいところですが、グッとこらえて定義に従って証明しましょう。A と A' が互いに他の補集合であることに注意してください。

a を A の**任意の**元とします。$x \in A'$ ならば、定義より $a < x$ となります。これの対偶をとると、

$$x \leq a \text{ となる } a \text{ が } A \text{ に存在するなら } x \in A \text{ である}$$

となり示せました。後半も同様です。 □

さて、次の節から二つの切断の間の大小関係と四則演算を定義しますが、これらは、もちろん新しく作られるものなので、既にある有理数の大小関係や四則演算と混同しないようにするために $\preceq, \oplus, \otimes$ などの変な記号を使うことにします。

4 大小関係

4.1 大小関係の定義

まず、大小関係からいきましょう。

大小関係

二つの切断 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ に対し、$A \subset B$ のとき $\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{B}$ と定義する。$\boldsymbol{B} \succeq \boldsymbol{A}$ とも書く。更に、$A \subset B$ だが $A \not\supset B$ のとき、$\boldsymbol{A} \prec \boldsymbol{B}$ や $\boldsymbol{B} \succ \boldsymbol{A}$ と書く。

(集合の包含関係の記号 $A \subset B$ は $A = B$ の場合を含む使い方をしています。ご注意下さい。) 図を書いて、この定義の当たり前さを納得しておいて下さい。

下集合の方で定義しましたが、補集合を考えれば、$\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{B}$ を $A' \supset B'$ で定義しても同じです。ただし、この場合記号の向きが反対っぽくなるので気を付けて下さい。

例 1. $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 1\}、\quad B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0 \text{ または } x^2 \leq 2\}$$

とすると $\boldsymbol{A} \prec \boldsymbol{B}$ となります。

この $\preceq$ が有理数の大小関係 $\leq$ と同じ性質を持つことを証明する必要があります。

4.2 $\preceq$ が大小関係の性質を持つことの証明

その性質とは、細かく分けると次の四つです[6]。すべて、直線の図で考えれば明らかなものばかりですが、プリントの趣旨に従って、わざと直線の図に頼らずに証明を書きます。わかりにくいときには、即座に図を書いて考えてみてください。

[6] 「なぜこれらの四つだけでよいのか。他に満たすべき性質がないことはどうして分かるのか」と疑問に思うかも知れません。それはもっともな疑問です。それに対する答はプリントの最後でお答えしますが、大雑把に言っておくと、「これから節を追って挙げていく大小関係・足し算・掛け

$\preceq$ の性質 1. どの切断 $\boldsymbol{A}$ に対しても $\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{A}$ である。

証明. $A \subset A$ なので、定義より $\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{A}$ が成り立ちます。 □

$\preceq$ の性質 2. 二つの切断 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が $\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{A} \succeq \boldsymbol{B}$ を両方とも満たすなら $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ である[7]。

証明. $\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{B}$ より $A \subset B$ であり、$\boldsymbol{A} \succeq \boldsymbol{B}$ より $A \supset B$ なので、$A = B$、すなわち $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ です。 □

$\preceq$ の性質 3. 三つの切断 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ が $\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{B} \preceq \boldsymbol{C}$ を満たすなら $\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{C}$ が成り立つ。

証明. $\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{B}$ より $A \subset B$ であり、$\boldsymbol{B} \preceq \boldsymbol{C}$ より $B \subset C$ なので $A \subset C$ が成り立ちます。つまり $\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{C}$ です。 □

$\preceq$ の性質 4. 任意の切断 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ に対して $\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{B}$ か $\boldsymbol{A} \succeq \boldsymbol{B}$ の少なくとも一方は成り立つ。

証明. $\boldsymbol{A} \succeq \boldsymbol{B}$ が成り立たないとして $\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{B}$ を導きましょう。

$\boldsymbol{A} \succeq \boldsymbol{B}$ が成り立たないということは、定義より $A \not\supset B$ ということです。よって、B には入っているが A には入っていない有理数 b_0 が存在します。A' は A の補集合ですから $b_0 \in A'$ です。すると、切断の定義より、A に属する任意の有理数 a に対して $a < b_0$ が成り立ちます。よって、補題 1 より、$A \subset B$ が成り立ちます。つまり $\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{B}$ です。 □

「幾何学的な直線のすべての点に数直線の数が対応していることを数の言葉で表す性質」は大小関係のみでできている概念ですので、そのことのみに興味のある人は第 8 節に跳んで下さい。このプリントでは、そのことの証明の前に切断を「数」にしてしまいましょう。

算およびそれらの間の関係が満たすべき性質」に「数直線が幾何学的な直線と一致することを表す一つの性質（『実数の連続性』といいます。）」を加えた性質をすべて満たすものは本質的に実数しかないことが証明できてしまうので、ここに挙げた性質以外の性質はすべてこれらの性質から導くことができることが保証されているのです。

[7]「$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ も新しい関係として定義しなければならないのではないか?」と思った人もいるかも知れません。$=$ というのは「同じもの」という意味であって、大小関係や足し算掛け算とは違う「始めからある関係」です。具体的には $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ とは「下集合同士（ということは上集合同士も）同じ集合である」という意味です。

5 足し算

5.1 足し算の定義

次に、足し算を定義しましょう。

足し算

二つの切断 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ に対し、有理数の集合 C' を、

$$C' = \{a' + b' \mid a' \in A', b' \in B'\}$$

とし、C を C' の補集合とする。その上で $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ と定義する。

つまり、A' とか B' とかは有理数の集合なのだから中身同士を足すことができるので、C' を A' と B' の中身を足したものの集まりとしなさい、ということです[8]。

これが本当に定義になっているかどうか[9]、つまり $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}$ が切断になっているかどうかを確かめる必要があります。

証明. 上の $\boldsymbol{C}$ が切断の定義を満たすことを確かめましょう。

A', B' が空集合でないのだから C' も空集合ではありません。一方、$a \in A$ と $b \in B$ をとると、どのような $a' \in A'$ と $b' \in B'$ をとっても $a + b < a' + b'$ だから $a + b \notin C'$ となります。よって C' の補集合である C も空ではありません。

C は C' の補集合だから $C \cup C' = \mathbb{Q}$ が成り立ちます。

ある $c \in C$ と $c' \in C'$ があって $c \geq c'$ だったとしましょう。C' の定義から $c' = a' + b'$ となる $a' \in A'$ と $b' \in B'$ があります。$c' \leq c$ と仮定しているので $c - b' \geq a'$ であり、$c - b' \in A'$ となります。しかし、これは $c \in C$ に矛盾します。よって、どの $c \in C$ と $c' \in C'$ に対しても $c < c'$ が成り立ちます。

C' の元 c'_1 は $c'_1 = a'_1 + b'_1$ と分解できます。(分解の仕方はいくつもありますが、そのうちの一つをとります。) A' も B' も最小数を持たないのですから、$a'_2 \in A$ と $b'_2 \in B$ で $a'_2 < a'_1$ と $b'_2 < b'_1$ を満たすものが存在します。$a'_2 + b'_2$ は C' の元で c'_1 より小さい元です。よって C' には最小数はありません。 □

例 2. 例 1 の $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ に対しては、$\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ として、

$$C' = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 1 \text{ かつ } (x-1)^2 > 2\}$$

となります。

5.2 $\oplus$ が足し算としての性質を持つことの証明

この $\oplus$ が有理数の足し算 $+$ と同じ性質を持つことを示しましょう[10]。

---

[8] 下集合を使って定義しても同じですが、次にやる証明が上集合の方が楽なのでこうしました。

[9] well-defined と言います。

[10] 足し算の満たすべき性質がこれから挙げるものだけでよいことについては 7 ページの脚注 6 を参照してください。

$\oplus$ の性質 1. [可換性] どの二つの切断 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ に対しても $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{A}$ が成り立つ。

証明. $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}$ とおくと、

$$C' = \{a' + b' \mid a' \in A', b' \in B'\}、D' = \{b' + a' \mid b' \in B', a' \in A'\}$$

であり、有理数の足し算が順番を入れ替えられるので、$C' = D'$ となります。よって $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$ です。 □

$\oplus$ の性質 2. [結合性] どの三つの切断 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ に対しても $(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}) \oplus \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \oplus (\boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{C})$ が成り立つ。

証明. これも、性質 1 の証明のように書き下してみれば、有理数の足し算の同じ性質から導かれます。 □

$\oplus$ の性質 3. [単位元の存在] どの切断 $\boldsymbol{A}$ に対しても $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}$ の成り立つ（$\boldsymbol{A}$ によらない）切断 $\boldsymbol{O}$ が存在する。

証明. $\boldsymbol{O}$ を

$$O' = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$$

とすればよいことを示しましょう。

任意の $\boldsymbol{A}$ を一つ取り、$\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{O} = \boldsymbol{B}$ とします。

B' に属する有理数 b' に対し、A' に属する有理数 a' と O' に属する有理数 o' があって $b' = a' + o'$ となります。しかも $o' > 0$ なので $a' + o' > a$ です。よって $a' + o'$ は A' に属します。つまり $B' \subset A'$、すなわち $\boldsymbol{B} \succeq \boldsymbol{A}$ です。

同様に、B に属する有理数 b に対し、A に属する有理数 a と O に属する有理数 o があって $b = a + o$ を満たし、しかも $o \leq 0$ ですので、$a + o \leq a$ です。よって $a + o$ は A に属します。つまり $B \subset A$、すなわち $\boldsymbol{B} \preceq \boldsymbol{A}$ です。

以上と大小関係の性質 2 より $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$ が示せました。 □

次の性質を述べる前に、性質 3 で存在の保証された単位元が一つしかないことを証明しておきましょう。

命題 1. 二つの切断 $\boldsymbol{O}$ と $\boldsymbol{P}$ が

$$\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{O} = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{P}$$

を任意の切断 $\boldsymbol{A}$ に対して満たすとすると、$\boldsymbol{O} = \boldsymbol{P}$ である。

証明. $\boldsymbol{A}$ は何でもよいのだから、$\boldsymbol{A}$ として $\boldsymbol{P}$ を選べば

$$\boldsymbol{P} \oplus \boldsymbol{O} = \boldsymbol{P}$$

が成り立ちます。一方、性質 1 を適用すれば、

$$\boldsymbol{P} \oplus \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O} \oplus \boldsymbol{P} = \boldsymbol{O}$$

がとなります。よって $\boldsymbol{O} = \boldsymbol{P}$ です。 □

一つしかないものには名前を付けておくのが便利です。

零 (zero)

性質 3 によって存在の保証された切断を**零**あるいは**ゼロ**と呼ぶ。

このプリントでは、一つしかないこの零のことを $\boldsymbol{O}$ と書くことにします。
足し算の性質を続けます。

$\oplus$ の性質 4. [逆元の存在] 任意の切断 $\boldsymbol{A}$ に対して

$$\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$$

を満たす切断 $\boldsymbol{B}$ が（$\boldsymbol{A}$ に応じて）存在する。

証明. 切断 $\boldsymbol{A}$ に対し、有理数の集合 B' を

$$B' = \{o' - a \mid a \in A, o' \in O'\}$$

とし B を B' の補集合とすることで定義します。

$\boldsymbol{B}$ が切断であることを示しましょう。

A は空でないので B' は空ではありません。また A' の任意の元 a' と A の任意の元 a に対し $a < a'$ という関係があるので $-a' \notin B'$ です。よって B も空ではありません。

B は B' の補集合なので $B \cup B' = \mathbb{Q}$ です。

B' の定義より、$b' = o' - a$ となる A の元 a と正の有理数 o' があります。一方、B は B' の補集合だから、B の任意の元 b に対し $a + b \leq 0$ です。よって、$b' - b = (b' + a) - (a + b) > 0$ となって $b < b'$ であることが示せました。

B の任意の元 b をまた $b' = o' - a$ と分解します。o' は正の有理数なので $\frac{o'}{2}$ も正の有理数であって、しかも $o' > \frac{o'}{2}$ です。よって $b'_1 = \frac{o'}{2} - a$ とすれば、b'_1 は B' の元で $b'_1 < b'$ を満たします。つまり B' に最小数はありません。

これで $\boldsymbol{B}$ が切断であることが示せました。

この $\boldsymbol{B}$ が $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$ を満たすことを示しましょう。

$\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ とおきます。$\oplus$ の定義と B' の定義より、C' の元 c' は A' の元 a' と A の元 a と正の有理数 o' によって $c' = a' - a + o'$ と表されるものの全体です。$a' > a$ と $o' > 0$ より $c' > 0$、つまり $C' \subset O'$、すなわち $\boldsymbol{C} \succeq \boldsymbol{O}$ です。

一方、任意の正の数 o' と A の元 a、A' の元 a' を固定します。$\frac{a+a'}{2}$ は有理数なので、A か A' のどちらかに属します。$\frac{a+a'}{2} \in A$ のときは $a = \frac{a+a'}{2}$ とおき直し、$\frac{a+a'}{2} \in A$ のときは $a' = \frac{a+a'}{2}$ とおき直せば、$a \in A, a' \in A'$ であって、しかも a と a' との差はもとの半分になっています。よって、これを繰り返せば $a' - a < \frac{o'}{2}$ とできます。これにより、C' の元 c' を $c' = a' - a + \frac{o'}{2}$ とすれば、$o' > c'$ となるので、補題 1 から $o' \in C'$ です。o' は任意の正の有理数だったので $O' \subset C'$、すなわち $\boldsymbol{C} \preceq \boldsymbol{O}$ です。

$\preceq$ の性質 2 より $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$ であることが分かりました。 □

以上で、足し算が単独で満たすべき性質が全て示されました。しかし、「引き算」を定義するために、性質 4 で存在の保証された切断が各 $\boldsymbol{A}$ に対して一つしか存在しないことを示しましょう。

命題 2. 切断 $\boldsymbol{A}$ に対し、二つの切断 $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ が

$$\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} = \boldsymbol{O} = \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{C}$$

を満たすとすると、$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ である。

証明. $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$ ですから、

$$(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}) \oplus \boldsymbol{C} = \boldsymbol{O} \oplus \boldsymbol{C}$$

です。$\oplus$ の性質 1, 2 と $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{C} = \boldsymbol{O}$ であることから左辺は $\boldsymbol{B}$ に等しく、$\oplus$ の性質 3 から右辺は $\boldsymbol{C}$ に等しいことが分かります。つまり $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ です。 □

ただ一つしかないものには名前を付けましょう。

符号を換えたもの[11]

$\boldsymbol{O}$ でない任意の切断 $\boldsymbol{A}$ に対し、$\boldsymbol{A}$ に足すと $\boldsymbol{O}$ になる切断を $\boldsymbol{A}$ の**符号を換えた**切断と言い、$\ominus\boldsymbol{A}$ と書く。

$\ominus$ の $\ominus$ は元に戻ることを示しましょう。

命題 3. 零でない任意の切断 $\boldsymbol{A}$ に対し、$\ominus(\ominus\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}$ が成り立つ。

証明. $\boldsymbol{A} \oplus (\ominus\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$ と、足し算の逆元が一つしかないことより分かります。 □

お察しの通り、「引き算」は新しく定義される演算ではなく、符号を換えたものを足すだけです。定義だけはしておきましょう。

引き算

二つの切断 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ に対し、

$$\boldsymbol{A} \ominus \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \oplus (\ominus\boldsymbol{B})$$

と定義する。

5.3 $\preceq$ の $\oplus$ に対する振る舞い

$\oplus$ と $\preceq$ との関係が、有理数での $+$ と $\leq$ との関係と同じであることを示しましょう。一つだけです[12]。

$\preceq$ と $\oplus$ の関係. 二つの切断 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が $\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{B}$ を満たすなら、任意の切断 $\boldsymbol{C}$ に対して $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{C} \preceq \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{C}$ が成り立つ。

証明. $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{C} = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}$ とおくと、$\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{B}$ より $A' \supset B'$ なので、$\oplus$ の定義より $E' \supset F'$ となります。よって $\boldsymbol{E} \preceq \boldsymbol{F}$ です。 □

[11] 名前を付けるといっておきながらこれは何だ!とのお怒りはもっともですが、「逆数」とか「逆元」とかというのはかけ算に対するものという印象が強いので、これで勘弁して下さい。
[12] 7 ページの脚注 6 を参照してください。

我々は、既に $\oplus$ の性質を証明してあるので、等号のないバージョンを導くことができます。

命題 4. 二つの切断 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が $\boldsymbol{A} \prec \boldsymbol{B}$ を満たすなら、任意の切断 $\boldsymbol{C}$ に対して $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{C} \prec \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{C}$ が成り立つ。

証明. $\preceq$ と $\oplus$ の関係 5.3 より $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{C} \preceq \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{C}$ まではよいので、$\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{C}$ を示せばよいことになります。

$\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{C}$ と仮定すると、両辺から $\boldsymbol{C}$ を引いて $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ が導かれますが、これは $\boldsymbol{A} \prec \boldsymbol{B}$ に矛盾します。 □

かけ算を定義するときに必要になるので、切断の「正負」を定義しておきましょう。零を中心に切断を「正負」に分けることができます。

切断の正負

切断 $\boldsymbol{A}$ は、$\boldsymbol{A} \succ \boldsymbol{O}$ のとき**正**の切断、$\boldsymbol{A} \prec \boldsymbol{O}$ のとき**負**の切断と呼ばれる。

有理数のときと同様、$\boldsymbol{O}$ でない切断は符号を換えると正負が変わります。

命題 5. 零でない任意の切断 $\boldsymbol{A}$ に対し、$\ominus\boldsymbol{A} \prec \boldsymbol{O} \prec \boldsymbol{A}$ か $\boldsymbol{A} \prec \boldsymbol{O} \prec \ominus\boldsymbol{A}$ が成り立つ。

証明. $\boldsymbol{A}$ を正の切断とします。つまり $\boldsymbol{O} \prec \boldsymbol{A}$ です。命題 4 より、両辺から $\boldsymbol{A}$ を引くことができて、$\ominus\boldsymbol{A} \prec \boldsymbol{O}$ となります。

$\boldsymbol{A} \prec \boldsymbol{O}$ のときも同様です。 □

6 かけ算

6.1 かけ算の定義

最後にかけ算を定義しましょう。かけ算の定義は正負によって場合分けがいります。

かけ算

二つの負でない切断 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ に対し、

$$C' = \{a'b' \mid a' \in A', b' \in B'\}, \quad C \text{ は } C' \text{ の補集合}$$

として、$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ と定義する。それ以外の場合は、

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{cases} \ominus((\ominus\boldsymbol{A}) \otimes \boldsymbol{B}) & \boldsymbol{A} \prec \boldsymbol{O} \preceq \boldsymbol{B} \text{ のとき} \\ \ominus(\boldsymbol{A} \otimes (\ominus\boldsymbol{B})) & \boldsymbol{A} \succeq \boldsymbol{O} \succ \boldsymbol{B} \text{ のとき} \\ (\ominus\boldsymbol{A}) \otimes (\ominus\boldsymbol{B}) & \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \prec \boldsymbol{O} \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義する。

これが well-defined であることを証明しましょう。

証明. $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ がともに負でない場合に $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ が切断であることを示せば十分です。

$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ とおきます。

A', B' とも空でないので $\boldsymbol{C}$ も空ではありません。一方、$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ とも負でないのですから、A' や B' に含まれる有理数は負でないので、すべての負の有理数は C' には含まれず、補集合である C も空ではありません。

C は C' の補集合なのですから $C\cup C'=\mathbb{Q}$ です。

C' の元 c' を一つ取り、$c'\le x$ となる任意の有理数は C' の元であることを示しましょう。$c'=a'b'$ と分解しておきます。$\boldsymbol{A}$ は負でないので $a'\neq 0$ です。すると、$y=\frac{x}{a'}$ とおけば $b'\le y$ なので $y\in B'$ です。よって、$x=a'y\in C'$ です。

C' の元 c' に対し、$c'=a'b'$ と分解すると、A' と B' に $a'_1<a'$ 及び $b'_1<b'$ となる元 a'_1 と a'_2 がそれぞれあるので、$c'_1=a'_1b'_1$ とすれば、$c'_1\in C'$ であって $c'_1<c'$ です。つまり、C' に最小数はありません。

これで $\boldsymbol{C}$ が切断であることを示せました。 □

例 3. 二つの切断 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を、

$$A'=\{x\in\mathbb{Q}\mid x>0 \text{ かつ } x^2>2\}$$
$$B'=\{x\in\mathbb{Q}\mid x>0 \text{ かつ } x^2>3\}$$

とし、$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ とすると、$\boldsymbol{C}$ は

$$C'=\{x\in\mathbb{Q}\mid x>0 \text{ かつ } x^2>6\}$$

である。

6.2 $\otimes$ がかけ算としての性質を持つことの証明

かけ算も、足し算とほとんど同じ性質を満たさなければなりません[13]。

$\otimes$ の性質 1. [可換性] どの二つの切断 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ に対しても $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{A}$ が成り立つ。

証明. まず、$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ とも負でない場合に示しましょう。

$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}, \boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}$ とおくと、

$$C'=\{a'b'\mid a'\in A', b'\in B'\}\text{、}D'=\{b'a'\mid b'\in B', a'\in A'\}$$

であり、有理数のかけ算が順番を入れ替えられるので、$C'=D'$ となります。よって $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}$ です。

一般の場合は、例えば $\boldsymbol{A}$ が負で $\boldsymbol{B}$ が負でない場合、

$$(\ominus\boldsymbol{A})\otimes\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}\text{、}\quad \boldsymbol{B}\otimes(\ominus\boldsymbol{A})=\boldsymbol{F}$$

とおくと、$\ominus\boldsymbol{A}$ の定義から

$$E'=\{(o'-a)b'\mid o'\in O'\text{、}a\in A, b'\in B'\}$$
$$F'=\{b'(o'-a)\mid o'\in O'\text{、}a\in A, b'\in B'\}$$

なので、$(\ominus\boldsymbol{A})\otimes\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\otimes(\ominus\boldsymbol{A})$ であり、足し算の逆元の一意性から $\ominus((\ominus\boldsymbol{A})\otimes\boldsymbol{B})=\ominus(\boldsymbol{B}\otimes(\ominus\boldsymbol{A}))$ となります。 □

[13] 7 ページの脚注 6 を参照してください。

$\otimes$ の性質 2. [結合性] どの三つの切断 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ に対しても

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) \otimes \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \otimes (\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{C})$$

が成り立つ。

証明. これも、三つとも負でない場合にかけ算の性質 1 の証明のように書き下してみれば、有理数のかけ算の同じ性質から導かれ、一般の場合も、足し算の逆元の一意性から分かります。 □

$\otimes$ の性質 3. [単位元の存在] どの切断 $\boldsymbol{A}$ に対しても $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}$ の成り立つ（$\boldsymbol{A}$ によらない）切断 $\boldsymbol{I}$ が存在する。

証明. I' を、

$$I' = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 1\}$$

としたとき、切断 $\boldsymbol{I}$ が性質 3 にある式を満たすことを示します。

任意の負でない $\boldsymbol{A}$ を一つ取り、$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{I} = \boldsymbol{B}$ とします。

A' の任意の元 a' と I' の任意の元 i' に対し、$i' > 1$ より $a'i' > a'$ となるので、$B' \subset A'$ です。よって $\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{B}$ が言えました。

一方、A' の任意の元 a' に対し、$a' > a'_1$ を満たす A' の 0 でない元 a'_1 をとれば、$\frac{a'}{a'_1} > 1$ ですから $\frac{a'}{a'_1} \in I'$ であり、$a' = a'_1 \frac{a'}{a'_1} \in B'$ となって、$A' \subset B'$ です。よって、$\boldsymbol{A} \succeq \boldsymbol{B}$ が示されました。

以上より、$\boldsymbol{A}$ が負でないときは $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}$ が成り立ちます。

$\boldsymbol{A}$ が負のときは、$\otimes$ の定義と上で示したことから、

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{I} = \ominus((\ominus \boldsymbol{A}) \otimes \boldsymbol{I} = \ominus(\ominus \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}$$

です。 □

次の性質を述べる前に、性質 3 で存在の保証された乗法の単位元が一つしかないことを証明しておきましょう。

命題 6. 二つの切断 $\boldsymbol{I}$ と $\boldsymbol{J}$ が

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{J}$$

を任意の切断 $\boldsymbol{A}$ に対して満たすなら、$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{J}$ である。

証明. 二つの切断 $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}$ がともに性質 3 を満たすとする。$\boldsymbol{I}$ に性質 3 を適用して

$$\boldsymbol{J} \otimes \boldsymbol{I} = \boldsymbol{J}$$

が成り立ちます。一方、性質 1 と、$\boldsymbol{J}$ が性質 3 を満たすことから、

$$\boldsymbol{J} \otimes \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}$$

が成り立ちます。よって $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{I}$ となって一意性が証明されました。 □

一つしかないものには名前を付けておくのでした。

いち

性質 3 によって存在の保証された切断を**いち**と呼ぶ。

このプリントでは「いち」を $\boldsymbol{I}$ と書くことにしましょう。
単位元の次は逆元です。

$\otimes$ **の性質 4.** [逆元の存在] $\boldsymbol{O}$ でない任意の切断 $\boldsymbol{A}$ に対して

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$$

を満たす切断 $\boldsymbol{B}$ が（$\boldsymbol{A}$ に応じて）存在する。

証明. いつも通り $\boldsymbol{A}$ が負でない場合から示します。
$\boldsymbol{A} \succ \boldsymbol{O}$ とし、$\boldsymbol{B}$ を

$$B' = \left\{ \frac{i'}{a} \mid a \in A,\, a > 0、i' > 1 \right\}$$

と定義します。このとき、$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$ となることを示しましょう。

$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ とおきます。C' の元 c' は I' の元 i' と A の正の元 a と A' の元 a' によって $c' = a'\frac{i'}{a}$ と分解できます。$0 < a < a'$ なので、$i' < c'$ 、つまり $C' \subset I'$ です。これで $\boldsymbol{C} \succeq \boldsymbol{I}$ が示されました。

一方、$\oplus$ の性質 4 の証明で示したように、A の元 a と A' の元 a' で差 $a' - a$ のいくらでも小さいものが存在します。$\boldsymbol{A}$ が正であることから a も正なので、$\frac{a'}{a}$ をいくらでも 0 に近付けることができます。よって、I' の任意の元 i' に対し、それより小さい I' の元 i'_1 と、十分近い a, a' があって、$a'\frac{i'_1}{a} < i'$ とできます。つまり $C' \supset I'$ です。これで $\boldsymbol{C} \preceq \boldsymbol{I}$ が示されました。

以上より $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}$ です。

次に $\boldsymbol{A}$ を負とします。$\ominus\boldsymbol{A}$ は正なので、これに対して上の構成をして $(\ominus\boldsymbol{A}) \otimes \boldsymbol{D} = \boldsymbol{I}$ となる切断 $\boldsymbol{D}$ を作れます。この $\boldsymbol{D}$ が正であることに注意すれば、$\otimes$ の定義から

$$\boldsymbol{A} \otimes (\ominus\boldsymbol{D}) = (\ominus\boldsymbol{A}) \otimes (\ominus(\ominus\boldsymbol{D})) = (\ominus\boldsymbol{A}) \otimes \boldsymbol{D} = \boldsymbol{I}$$

となるので、$\boldsymbol{B} = \ominus\boldsymbol{D}$ とすればよいことが分かります。 □

以上で、かけ算が単独で満たすべき性質は全部です。かけ算と足し算は具体的な中身を考えなければ同じものなのです。

かけ算の性質は終わりましたが、いつもの通り一つしかないものには名前をつけましょう。

逆元

零でない切断 $\boldsymbol{A}$ に対し、かけ算の性質 4 によって存在の保証された切断を $\boldsymbol{A}$ の**逆元**と言う。このプリントでは $\oslash\boldsymbol{A}$ と書くことにする。

割り算は当然こうなります。

割り算

切断 $\boldsymbol{A}$ と零でない切断 $\boldsymbol{B}$ に対し

$$\boldsymbol{A} \oslash \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \otimes (\oslash \boldsymbol{B})$$

と定義する。

6.3 $\preceq$ と $\otimes$ の関係

$\preceq$ と $\otimes$ の関係は、次だけです[14]。

$\preceq$ と $\otimes$ の関係. 二つの切断 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ がともに負でないなら $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ も負でない。

証明. $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が負でないとは、A' 及び B' のすべての元が正だということです。$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ とおくと、$\otimes$ の定義から C' の元も全て正となります。よって $\boldsymbol{C}$ は負ではありません。 □

6.4 $\oplus$ と $\otimes$ の関係

有理数の場合と同様に、切断の足し算とかけ算の間にも分配法則が成り立たないと困りますね。

$\oplus$ と $\otimes$ の関係 1. [分配律] 三つの切断 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ に対し、

$$\boldsymbol{A} \otimes (\boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) \oplus (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{C})$$

が成り立つ。

証明. $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} \otimes (\boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{C})$ 及び $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) \oplus (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{C})$ とおくと、

$$\begin{aligned} D' =& \{a'(b'+c') \mid a' \in A', b' \in B', c' \in C'\} \\ E' =& \{a'b' + a'c' \mid a' \in A', b' \in B', c' \in C'\} \end{aligned}$$

であり、有理数の分配法則よりこの二つは等しいことが分かります。よって $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}$ です。 □

もうひとつ、少々ヲタッキーな性質を示す必要があります。

$\oplus$ と $\otimes$ の関係 2. 足し算の単位元 $\boldsymbol{O}$ とかけ算の単位元 $\boldsymbol{I}$ は等しくない。

証明. O' は正の有理数全体、I' は 1 より大きい有理数全体なので $\boldsymbol{O} \neq \boldsymbol{I}$ です。 □

---

[14] 7 ページの脚注 6 を参照してください。

なぜこんな馬鹿らしいことをわざわざ言わなければならないかと言うと、零だけからできている集合も、今まであげてきた数としての性質を満たしてしまうから、零以外の元もあることを確認しなければならないのです。もちろん、$\boldsymbol{O}$ でない切断が存在することは具体的にそのような切断を作ってみせることで簡単に分かるのですが、実数の作り方は切断だけではありませんので、どのような作り方にも共通に通用する性質として述べるために、零以外の元の代表者として「いち」を選んであるわけです。

7 切断と有理数

これまでで、切断の全体に大小関係と足し算とかけ算を上手く定義して、有理数の全体が満たしているのと同じ性質を満たすようにすることができました。次にしなければならないのは、一部の切断を有理数だと思って良いことを示すことです。つまり、常日頃我々が思っている「実数は有理数と無理数でできていて、有理数だけでも四則演算ができる」と言うことを正当化する必要があります。面倒なので、切断の全体を $\mathfrak{D}$（ディー）で表すことにしましょう[15]。Dedekind（デデキント）の $\mathfrak{D}$ です。

さて、我々は第 3 節においてどのような考察から切断の考えに到ったのでしょうか。それは、「直線」上の点が、その「直線」を二つに分けることからでした。そして、その点が有理数に当たる点のときは、切断の下集合に最大数があり、しかも、それがそのちょうど切られた有理数だということでした。だから、切断の全体 $\mathfrak{D}$ の中で有理数に当たるものは、下集合に最大数がある切断の全体でなければならず、有理数との対応は、有理数 a に対し

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq a\}$$

で定義される $\boldsymbol{A}$ でなければなりません。この $\boldsymbol{A}$ を a に対応することをはっきりさせるために $\boldsymbol{)a(} = \langle)a(,)a(' \rangle$ と書き[16]、そのような切断の全体を $\mathfrak{Q}$（キュー）と書くことにしましょう。つまり、

$$\begin{aligned})a(&= \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq a\}、\\ \mathfrak{Q} &= \{\boldsymbol{A} \mid A \text{ に最大数がある}\} \\ &= \{\boldsymbol{)a(} \mid a \in \mathbb{Q}\} \end{aligned}$$

[15] ここで始めて「切断全体の集合」が出てきました。ここまでは「二つの切断があったら」とか「切断が与えられたら、それに対してこれこれ切断がある」とかという議論をしてきました。いわば「構成可能な議論」です。しかし、「すべての切断を全部一遍に考える」というのはもはや「構成可能」とは言えません。つまり「有理数から実数を構成する」といっても、実は「構成なんてしてないじゃん」という批判には答えられないのです。「実数の全体」に何となくつかみ所のない雰囲気のまとわりついているのはこのためです。「構成可能」の意味については、手頃なものとしては例えば講談社現代新書「無限論の教室」（野矢茂樹）を見てください。

[16]「切り口」に a がいる感じを出すためにこのような記号にしてみましたが、なんだか見辛かったようですね。すみません。

です。ところが、$\mathfrak{D}$ の四則演算や大小関係は我々が作ったものなのですから、これが $\mathfrak{Q}$ に制限でき、しかも、対応 $a \mapsto)\boldsymbol{a}($ で有理数の四則演算と切断の四則演算が同じになっていなければいけません。正確に言うと次の二つです。

命題 7. $\mathfrak{Q}$ の任意の元 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ に対し、$\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} \in \mathfrak{Q}$、$\ominus\boldsymbol{A} \in \mathfrak{Q}$、$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} \in \mathfrak{Q}$、$\oslash\boldsymbol{A} \in \mathfrak{Q}$ が成り立つ。ただし、最後の場合のみ $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$ とする[17]。

証明. $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, $\ominus\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$, $\oslash\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}$ とおきましょう。

$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B} \in \mathfrak{Q}$ より、ある有理数 a, b によって $\boldsymbol{A} =)\boldsymbol{a}($, $\boldsymbol{B} =)\boldsymbol{b}($ です。このとき、$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq a + b\}$, $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq -a\}$, $E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq ab\}$, $F = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq a^{-1}\}$ であることを示しましょう。

C' の定義から $a + b \notin C'$ なので、$a + b \in C$ であり、$a + b$ より大きい有理数 c に対して $\delta = \frac{c-a-b}{2}$ とおけば、$a + \delta \in A'$ 及び $b + \delta \in B'$ で $c = (a + \delta) + (b + \delta)$ なので $c \notin C$ です。これで $a + b$ が C の最大数であることが示せました。

$\ominus\boldsymbol{A}$ の定義より、

$$B' = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > -a\}$$

なので、$-a$ が B の最大数です。

$\otimes$ は $\oplus$ と、$\oslash$ は $\ominus$ とほとんど同様に示せます。 □

命題 8. 任意の二つの有理数 a, b に対し、$)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}(=)\boldsymbol{a}(\oplus)\boldsymbol{b}($, $)\boldsymbol{ab}(=)\boldsymbol{a}(\otimes)\boldsymbol{b}($ 及び $a \leq b$ ならば $)\boldsymbol{a}(\preceq)\boldsymbol{b}($ が成り立つ。

つまり、足したものの切断と切断してから足したものは同じ、かけたものの切断と切断してからかけたものは同じ、有理数の大小関係と切断後の大小関係は同じということです。

証明. 命題 7 の証明から分かるとおり、$)\boldsymbol{a}(\oplus)\boldsymbol{b}($ の下集合の最大数は $a + b$ であり、$)\boldsymbol{a}(\otimes)\boldsymbol{b}($ の下集合の最大数は ab なので、$)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}(=)\boldsymbol{a}(\oplus)\boldsymbol{b}($ と $)\boldsymbol{ab}(=)\boldsymbol{a}(\otimes)\boldsymbol{b}($ が示せました。

また、

$$)a(= \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq a\}、\quad)b(= \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq b\}$$

なので、$a \leq b$ ならば $)a(\subset)b($ となって $)\boldsymbol{a}(\preceq)\boldsymbol{b}($ が成り立ちます。 □

引き算とわり算については、それらが足し算とかけ算を使って定義されるものであることから別に示す必要はありません。詳しくは自分で考えてみて下さい。

以上で、切断の全体 $\mathfrak{D}$ を「有理数を拡張した数」と見てよいことが分かりました。そこで、これからは切断のことを**実数**と呼び、特に、有理数でない切断のことを**無理数**と呼ぶことにしましょう。そして、記号も $\boldsymbol{A}$ 等という大袈裟なものでなく、ただの小文字にしましょう。ただ、a 等は今まで有理数として使ってきたので、α, β 等のギリシャ文字を使うことにします[18]。また、大小関係や四則演算に使ってきた $\preceq, \prec, \oplus, \ominus, \otimes, \oslash$ 等の変な記号も、普通の $\leq, <, +, -, \times$(または $\cdot$ または何も無し)、 $^{-1}$ を使いましょう。

[17]大小関係は二つの元から別の元を作り出すものではありませんので、当然 $\mathfrak{Q}$ に制限できます。
[18]必要に応じて切断の記号も使います。

8 「実数の連続性」と「有理数の稠密性」

以上で、有理数から実数を作り終えました。しかし、本当に目標が達成できたのでしょうか。つまり、直線上の点で有理数直線に乗っていなかった「幅のない隙間」を「ひとつひとつバラバラ」にしてすべてを取り尽くし、しかも有理数と「隙間」以外の余計なものは全く拾わなかったのでしょうか。この節ではこの二つのことが上手く実現できたことを確認しましょう。

8.1 有理数の稠密性

まず、「『幅のない隙間』以外のものは拾わなかった」ことを確認しましょう。

我々の作った実数にも大小関係がありますので、小さい方から大きい方へすべての実数が並んではいます。だから、我々の作った実数においても有理数が「(幅を持った)隙間」なく並んでいることを確認できればよいわけです。そのことは、隙間の方ではなく有理数の方を使って、どの二つの実数の間にも必ず有理数が存在することと言い表すことができます。このことを**有理数の稠(ちゅう)密性**と言います。

有理数の稠密性. 任意の二つの実数 $\alpha < \beta$ に対し $\alpha < c < \beta$ を満たす有理数 c が存在する。

証明. $\alpha = \boldsymbol{A}, \beta = \boldsymbol{B}$ とします。$\alpha < \beta$ ということは $A \subset B$ であってしかも $A \neq B$ ということです。よって $c \in B$ だが $c \notin A$ である有理数 c が存在します。この c、切断で書けば

$$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq c\}$$

による $\boldsymbol{C}$ が求める有理数です。なぜなら、$A \subset C \subset B$ でありかも $A \neq C \neq B$ なので、$\alpha < c < \beta$ となっているからです。 □

8.2 実数の連続性

我々の作った実数が有理数と「隙間」だけでできていることが前節の「有理数の稠密性」分かりましたので、最後にすべての「隙間」を取り尽くしたことを確認しましょう。言葉を換えていえば、我々の作った実数の全体が「直線のイメージ[19]」に合っていることを確認しようということです。

「直線のイメージ」のことを数の大小関係の言葉で述べたものを「連続性[20]」と

[19] もちろん、ここで言っているのは「真っ直ぐ」ということではありません。「平行でない任意の二直線はただ一点で交わる」とか「任意の二線分に比がある」といったことです。

[20] 「実数の連続性」は、「関数の連続性」とは違います。じゃあなんで同じ言葉を使うんだ!!と私に向かって言わないで下さい。なお、講義ではこの混乱を避けるためか「連続性」ではなく「完備性」という言葉を使っているようです。しかし、「完備性」は別な定義を持つ(一見)別な性質ですので、教科書や参考書を読むときなどは気を付けてください。

言います。

「実数の連続性」は普通次のように言い表されます[21]。

> **実数の連続性.** 実数の空でない部分集合で下に有界なものは下限を持つ。

ここで、実数の部分集合 X が**下に有界**とは、X の任意の元 α に対し、α によらない定数 ρ で $\rho \leq \alpha$ を満たすものが存在することで、この ρ のようなものを集合 X の**下界**、下界の全体に最大数があるとき、その最大数を集合 X の**下限**と言います。例えば、X が $\sqrt{3}$ 以上の実数全体のとき、X は下に有界で 1 や $-\pi$ 等は下界です。$\sqrt{3}$ は X の元ですが、やはり下界であってしかも下限です。

証明. X を下に有界な集合とします。X の元 α は切断なので、それを $\boldsymbol{A}_\alpha$ と書くことにします。そして切断 $\boldsymbol{A}$ を

$$A' = \bigcup_{\alpha \in X} A'_\alpha$$

で定義します。

切断と言いましたが、well-defined であることを示さないと切断とは言えません。well-definedness を示しましょう。

A'、A ともに空集合でないことと、$A \cup A' = \mathbb{Q}$ はいいでしょう。

定義より、A の元はすべての α についての A'_α のどの元より小さくなっています。よって、A の任意の元は A' の任意の元より小さいことが分かります。。

A' の元は X に属するある α に対する A'_α の元であることから、A' に最小数があったら、それはある A'_α の最小数になってしまい、$\boldsymbol{A}_\alpha$ が切断であることに矛盾します。よって A' には最小数はありません。

これで $\boldsymbol{A}$ が切断であることが示せました。

$\boldsymbol{A}$ が X の下限であることを示しましょう。$A'_\alpha \subset A'$ なので、$\boldsymbol{A}$ が X の下界です。だから、$\boldsymbol{A}$ より大きい実数は X の下界でないことを示せばよいことになります。

切断 $\boldsymbol{B}$ を $\boldsymbol{A}$ より大きいとします。つまり、$B' \subset A'$ だが $B' \not\supset A'$ ではないとします。すると、A' の元 a で B' の元でないものが存在します。A' の定義より、この a はある A'_α に属します。よって $B' \not\supset A'_\alpha$ です。つまり $\boldsymbol{B} \not\leq A'_\alpha$ であって、$\boldsymbol{B}$ は X の下界ではありません。 □

これで、$\mathfrak{D}$ が我々の求めていた実数の性質を満たしてくれることが分かってメデタシメデタシということにります。皆さん、御苦労さまでした。

っと、確かにこれで実数の構成は終わりましたが、この「実数の連続性」とはじめの方で考えた「直線のイメージ」とが結びつきますか? 我々の話の流れから言えば、やはり実数の連続性はこうあるべきでしょう:

> **切断の考えによる連続性.** 実数をデデキント切断すると、下集合に必ず最大数がある。

「実数をデデキント切断する」とは、第 3 節で述べたデデキント切断の定義をただ実数に当てはめただけのものです。だから、こちらの連続性の表現は、まさしく「平行でない二直線[22]は一点を共有する」というイメージに当たるでしょう。

[21] 一般的には「上に有界なら上限を持つ」ですが、切断の定義を「上集合に最小数がない」にしてしまったので、上限ではなく下限で書きました。もちろん、この二つは同値です。

[22] 今は「平面」を考えていないので、この言い方はちょっと腑に落ちないかも知れません。しか

実は、この二つは同値です。つまり、切断の集合 $\mathfrak{D}$ 等という具体的なものを使わずに「実数の連続性」から「切断の考えによる連続性」が、逆に、「切断の考えによる連続性」から「実数の連続性」が抽象的に導かれます。やっておきましょう。

証明. まず、「実数の連続性」から「切断の考えによる連続性」を導きましょう。つまり、「下に有界な任意の部分集合は下限を持つ」を仮定して「任意の切断は下集合に最大元がある」を示すのです。

切断 $\boldsymbol{A}$ の下集合は上集合の下界の全体です。今、下限があることを仮定しているのですが、下限とは下界の最大数なので、下集合に最大限があることになります。これで導けました。

次に、「切断の考えによる連続性」から「実数の連続性」を導きましょう。つまり、「任意の切断は下集合に最大元がある」を仮定して「下に有界な任意の部分集合は下限を持つ」を示しましょう。

下に有界な部分集合に対し、その下界の全体を A とすると、$\boldsymbol{A}$ は切断になります。よって、仮定より A には最大元があります。それはまさしくはじめの部分集合の下限です。 □

9 実数の一意性

切断の全体 $\mathfrak{D}$ が満たすことを証明してきた「$\cdots$ の性質」、「$\cdots$ の関係」および「実数の連続性」を併せて「実数の公理」と言います。切断の全体 $\mathfrak{D}$ が「実数の公理」を満たすことを一つ一つ確認してきた理由は、「実数の公理」を満たすことが実数の定義だからです。（もちろん、本当は話は逆で、実数をいろいろいじってみるにこれらの性質が実数を特徴付けているようだ、ということになったのです。）

「実数を特徴付けている」と言えるには、これらの性質が実数によって満たされているだけではダメで、これらの性質を満たすものが「本質的」に一つしかないことを示す必要があります[23]。ここで「本質的」とは

> 実数の公理を満たす二つの集合[24] X と Y に対し、写像 $\phi\colon X \to Y$ で次の条件を満たすものがただひとつ存在する:
> ϕ は上への一対一写像。
> X の任意の元 x_1, x_2 に対し $\phi(x_1 + x_2) = \phi(x_1) + \phi(x_2)$ が成り立つ。
> X の任意の元 x_1, x_2 に対し $\phi(x_1 \times x_2) = \phi(x_1) \times \phi(x_2)$ が成り立つ。
> X の任意の元 x_1, x_2 に対し $x_1 \leq x_2$ と $\phi(x_1) \leq \phi(x_2)$ とは同値。

つまり、集合と写像の観点から見た場合に区別して扱う必要がないということです。

し、幾何の言葉についてこれ以上追求すると混乱が増すだけですので、我慢して下さい。要するに、正方形の対角線上にちゃんと正方形の頂点がのっている、つまり、有理数だけを考えていたのでは上手くいかなかったところが上手くいっている、という程度のことです。

[23] 7 ページの脚注 6 で言及した、「大小関係や四則演算の満たすべき性質はこれだけでよい」ということの根拠がこれです。

[24] もちろん四則演算や大小関係があるものです。

証明はお任せします。まず、零は零に、いちはいちに写らなければならないことを示します。そうすると、四則演算を使って有理数に当たる部分の写像ができます。後は無理数が有理数列の極限として表せることを利用すればできます。この冊子では、数列や極限のことを扱わなかったので省略させて下さい。(必要なら、あとで補足プリントを別に書きます。)