2006 年度数学 IA 演習補足解説

ガンマ関数とベータ関数

理 I 22, 23, 24, 25, 26, 27 組

2 月 13 日 清野和彦

1 前書き

このプリントでは、ガンマ関数とベータ関数の定義と基本性質を説明します。

ガンマ関数は正実数を定義域[1]とする 1 変数関数で、$\Gamma(x)$ という記号を使うことになっています。後で証明しますが、x が自然数 n のとき

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

となっており、ガンマ関数が重要である理由は階乗を自然数でない正の実数にまで自然に拡張したものになっていることです。

一方、ベータ関数は二つの正実数を定義域[2]とする 2 変数関数です。後で証明しますが、ベータ関数はガンマ関数によって

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

と表すことができ、ガンマ関数が重要であるようにベータ関数も重要な関数です。

「関数」という単語を聞くと、普通多項式や三角関数、指数関数など、およびそれらを足したり掛けたり合成したりしたものを思い浮かべるでしょう。このような「式で書ける」関数のことを**初等関数**と言います。実は、ガンマ関数とベータ関数は初等関数ではないことが知られています。つまり、ガンマ関数とベータ関数は式で書くことができないわけです。それでは、どのようにしてこの二つの関数を定義するのでしょうか。積分、それも**広義積分**によって定義するのです。初等関数でない以上、この積分ははずすことができません。だから、ガンマ関数やベータ関数の性質は積分記号を背負ったまま調べていかなければならないことになります。

2 ガンマ関数の定義と基本性質

ガンマ関数を定義するために、まず

[1]実は、定義域を 0 と負の整数以外の複素数にまで拡張できるのですが、そのような進んだ話はこのプリントでは扱いません。

[2]ガンマ関数と同様に定義域を拡張することができるのですが、ここでは扱いません。

> x を任意の正実数とすると、t の関数 $e^{-t}t^{x-1}$ は $(0,\infty)$ で広義積分可能である。（ただし、$x \geq 1$ のときには $t=0$ では本当の積分です。）

ということを確認しておきましょう。

証明. $x<1$ のときには積分区間の下の端 0 も広義積分ですので、

$$\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt + \int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

と分けて考えましょう。

第 2 項については、任意の a に対して

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^a}{e^t} = 0$$

であることから、例えば

$$0 < e^{-t}t^{x-1} < \frac{M}{t^2}$$

が $[1,\infty)$ で成り立ちます。$[1,\infty)$ における右辺の広義積分は収束しますので、左辺 $e^{-t}t^{x-1}$ の広義積分は任意の正実数 x に対して収束します。

$0<x<1$ のときは $1-x<1$ で、$(0,1]$ 上

$$0 < e^{-t}t^{x-1} < \frac{1}{t^{1-x}}$$

が成り立ちます。$(0,1]$ における右辺の広義積分は収束しますので、左辺の広義積分も収束します。 □

この広義積分の値は正実数 x を決めるごとに決まるので、正実数を定義域とする関数と見ることができます。それのことを

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

と書いて**ガンマ関数**と呼びます。

前書きにも書いたように、ガンマ関数は「式で書くことができない」ことが知られています。そこで、積分記号を背負ったまま性質を探っていかなければなりません。x を変数と見たときの性質を論じるには「積分の下での微分」を使わなければならないので、それについては次節で説明することにして、ここでは x が連続変数であるということを使わずに証明できる性質のみ扱いましょう。

まず、積分される関数が常に正の値を取っているので、任意の x に対して

$$\Gamma(x) > 0$$

です。

次に、最も重要なこと、すなわち、

ガンマ関数が階乗 $n!$ の拡張になっている

ことを示しましょう。具体的には、

$$\Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

が成り立ちます。

証明. $x = 1$ を代入すると

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^\infty = 1$$

です。

また、部分積分により

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \left[e^{-t} \frac{t^x}{x} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-e^{-t} \right) \frac{t^x}{x} dt = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-t} t^{x+1-1} dt \\ &= \frac{1}{x} \Gamma(x+1)\end{aligned}$$

となります。 □

このことから、n を自然数とすると、

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) \\ &= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &= \cdots \\ &= (n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 \Gamma(1) \\ &= (n-1)!\end{aligned}$$

となることがわかります。

x が自然数でないときの値を見るために、変数変換をしてガウス積分と関連づけましょう。$t = s^2$ と置換することにより、

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^\infty e^{-s^2} s^{2x-1} ds$$

となります。

証明. ただ計算するだけです。

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^\infty e^{-s^2} s^{2(x-1)} 2s ds = 2 \int_0^\infty e^{-s^2} s^{2x-1} ds$$

です。 □

よくある置換積分にすぎませんが、このことと講義や演習で学んだガウス積分の結果を使うと、重要な値

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$$

がわかります。

3 ガンマ関数の関数としての性質

次に、演習第 13 回で学んだ積分と微分や極限の順序交換を利用して、ガンマ関数 $\Gamma(x)$ を x の関数と思ったときの性質を調べましょう。

まずは、x についての極限と広義積分の順序交換によって、

$\Gamma(x)$ は連続関数である

を証明しましょう。

証明. x_0 をひとつ決め、そこで連続なことを示しましょう。
$0 < a < x_0 < b$ を満たす a, b を取ります。すると、$[a, b]$ 内の任意の x に対して

$$e^{-t}t^{x-1} \leq \begin{cases} e^{-t}t^{a-1} & t \leq 1 \\ \\ e^{-t}t^{b-1} & t \geq 1 \end{cases}$$

が成り立ちます。よって、

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t}t^{a-1} & t \leq 1 \\ \\ e^{-t}t^{b-1} & t \geq 1 \end{cases}$$

とおけば、$g(t)$ は $[0, \infty)$ で広義積分可能であり、しかも $[a, b]$ において

$$|e^{-t}t^{x-1}| \leq g(t)$$

を満たします。よって、広義積分 $\Gamma(x)$ は $[a, b]$ において一様収束するので $\Gamma(x)$ は $[a, b]$ で連続、特に x_0 で連続です。x_0 は任意でしたので、これで証明が終わりました。 $\square$

微分可能性も、第 13 回解説定理 16 を使って同様に示せます。

$\Gamma(x)$ は C^1-級関数で、

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\log t dxt$$

である。

証明. 被積分関数を x で偏微分すると

$$\frac{\partial}{\partial x}e^{-t}t^{x-1} = e^{-t}t^{x-1}\log t$$

ですので、第 13 回解説定理 16 より、$e^{-t}t^{x-1}\log t$ が広義積分可能でそれが一様収束することを示せばよいことになります。

まず、広義積分可能なことを示しましょう。任意の正実数 a に対して

$$\lim_{t\to 0} t^a \log t = 0$$

ですので、$x > 1$ のときは $e^{-t}t^{x-1}\log t$ は $[0,1]$ で普通に積分可能で、$x \leq 1$ のときは $1-x<\alpha<1$ となる α を取れば

$$e^{-t}t^{x-1}\log t < \frac{M}{t^\alpha}$$

となる定数 M が $(0,1]$ 内の t に依らずに取れますので広義積分可能です。同様に、任意の正実数 a に対して

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t}t^a\log t = 0$$

ですので、任意の正実数 α に対して

$$e^{-t}t^{x-1}\log t < \frac{M}{t^\alpha}$$

となる M が $[1,\infty)$ 内の t に依らずに取れます。よって、やはり広義積分可能です。

任意の正実数 x_0 に対して $0<a<x_0<b$ となる a, b を取りましょう。すると $[a,b]$ 内の任意の x に対して

$$|e^{-t}t^{x-1}\log t| \leq \begin{cases} e^{-t}t^{a-1}|\log t| & t \leq 1 \\ e^{-t}t^{b-1}\log t & t \geq 1 \end{cases}$$

が成り立ちますので、

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t}t^{a-1}|\log t| & t \leq 1 \\ e^{-t}t^{b-1}\log t & t \geq 1 \end{cases}$$

とおけば、$g(t)$ は $(0,\infty)$ で広義積分可能で

$$|e^{-t}t^{x-1}\log t| \leq g(t)$$

を満たしますので、

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\log t dt$$

は $[a,b]$ で一様収束します。よって第 13 回解説定理 16 が使えて (a,b) において

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\log t dt$$

が成り立ちます。x_0 は任意でしたので、これで証明できました。 □

この証明と同様のことをくり返して、$\Gamma(x)$ は C^∞-級関数で

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}(\log t)^n dt$$

が示せます。

4 ベータ関数

次に、広義積分によって定義される 2 変数関数であるベータ関数を紹介しましょう。

任意の二つの正実数 x, y に対し、

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

は収束する。(x が 1 以上のときは $t=0$ では普通の積分、y が 1 以上のときは $t=1$ では普通の積分です。)

証明. 積分区間の両端とも広義積分になる可能性があるので、

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

と分けて考えましょう。

右辺の第 1 項は $x<1$ のとき $t=0$ で広義積分です。しかし、$x>0$ なら

$$0 < t^{x-1}(1-t)^{y-1} < \frac{1}{t^{1-x}}$$

が $(0, 1/2]$ 内の任意の t に対して成り立ち、$1-x<1$ であることから右辺の $(0, 1/2]$ における広義積分は収束するので、左辺の広義積分も収束します。

同様に、第 2 項についても $0<y<1$ のとき、

$$0 < t^{x-1}(1-t)^{y-1} < \frac{1}{(1-t)^{1-y}}$$

が成り立っていることから収束します。 □

ベータ関数とは、

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

によって定義される二つの正実数 x, y を変数とする 2 変数関数です。

ベータ関数とガンマ関数の関わりは次節で説明することにして、ここでは簡単な置換積分でわかるベータ関数の性質を二つ示しておきましょう。

ベータ関数も積分される関数が常に正ですので、任意の x, y に対して

$$B(x,y) > 0$$

が成り立ちます。

また、ベータ関数は二つの変数 x, y に対して対称です。つまり、

$$B(x,y) = B(y,x)$$

が成り立ちます。

証明. $s=1-t$ と置換すると、

$$\begin{aligned}B(x,y)&=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\int_1^0(1-s)^{x-1}s^{y-1}(-1)ds=\int_0^1 s^{y-1}(1-s)^{x-1}ds\\&=B(y,x)\end{aligned}$$

となります。 □

それから、ベータ関数は三角関数の積分として、

$$B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta d\theta$$

と表されます。

証明. $t=\sin^2\theta$ と置換すると、

$$\begin{aligned}B(x,y)&=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2\theta\right)^{x-1}\left(1-\sin^2\theta\right)^{y-1}2\sin\theta\cos\theta d\theta\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta d\theta\end{aligned}$$

となります。 □

このようにベータ関数がよく見かける形の三角関数の積分になっていることから、ベータ関数は物理や工学などのいろいろな場面で現れてきます。そして、次節で証明するようにベータ関数はガンマ関数で表すことができるので、これらの積分が階乗と関連づけられることがわかります。

5 ガンマ関数とベータ関数の関係

ガンマ関数とベータ関数の間には

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

という著しい関係があります。これを証明しましょう。

証明. $\Gamma(1/2)$ の値を計算したときに既に見ましたが、ガンマ関数の定義式において $t=s^2$ と置換すると

$$\Gamma(x)=2\int_0^{+\infty}e^{-s^2}s^{2x-1}ds$$

となります。一方、ベータ関数は

$$B(x,y)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta d\theta$$

と表すことができました。よって、極座標変換の公式により

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= \left(2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{2x-1}du\right)\left(2\int_0^{+\infty} e^{-v^2}v^{2y-1}dv\right) \\
&= 4\int_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} e^{-u^2-v^2}u^{2x-1}v^{2y-1}dudv \\
&= 4\int_{[0,+\infty)\times[0,2\pi)} e^{-r^2}r^{2(x+y)-2}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta r dr d\theta \\
&= \left(2\int_0^{+\infty} e^{-r^2}r^{2(x+y)-1}dr\right)\left(2\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta d\theta\right) \\
&= \Gamma(x+y)B(x,y)
\end{aligned}$$

となります。これで示せました。 □

　このことから、例えば次のような積分が計算できます。

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\left(n+\frac{1}{2}\right)-1}\theta\cos^{2\frac{1}{2}-1}\theta d\theta = \frac{1}{2}B\left(n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+1\right)} = \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2(n!)} \\
&= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1\pi}{2^{n-1}2(n!)} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\pi
\end{aligned}$$

および、

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2(n+1)-1}\theta\cos^{2\frac{1}{2}-1}\theta d\theta = \frac{1}{2}B\left(n+1,\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} = \frac{n!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{2^n(n!)}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1} = \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3}
\end{aligned}$$

となります。具体的には、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta = \frac{2}{3},\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta = \frac{3}{8}\pi,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta d\theta = \frac{8}{15},\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta d\theta = \frac{15}{48}\pi$$

などです。

6 計算問題

定積分や広義積分をガンマ関数（というかベータ関数）に帰着させる計算問題をいくつか挙げておきます。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^4}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^3 (x+1)^3\sqrt{3-x}dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x^5(1-x)^3}}{(x+4)^6}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4\theta\sin^6\theta}{\left(4\cos^2\theta+5\sin^2\theta\right)^6}d\theta$

解答

(1) $t=\dfrac{1}{1+x}$ と置換しましょう。$x=\dfrac{1-t}{t}$ となりますので、$\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{t^2}$ です。また、$x=0$ のとき $t=1$、$x\to\infty$ のとき $t\to 0$ となります。よって、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^4}dx &= \int_1^0 \sqrt{\frac{1-t}{t}}\,t^4\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_0^1 t^{\frac{5}{2}-1}(1-t)^{\frac{3}{2}-1}dt \\ &= B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{3!} \\ &= \frac{3\sqrt{\pi}^2}{2^3 3!} = \frac{\pi}{16}\end{aligned}$$

となります。 □

(2) $t=\sqrt{x}$ と置換しましょう。$x=t^2$ ですので $\dfrac{dx}{dt}=2t$ となります。よって、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}2tdt = 2\int_0^1 t^{2-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}dt \\ &= 2B\left(2,\frac{1}{2}\right) = 2\frac{\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = 2\frac{1\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{8}{3}\end{aligned}$$

となります。 □

(3) $t=\dfrac{x+1}{4}$ と置換しましょう。$x=4t-1$ ですので $\dfrac{dx}{dt}=4$ です。また、$x=-1$

のとき $t=0$、$x=3$ のとき $t=1$ となります。よって、

$$\int_{-1}^{3}(x+1)^3\sqrt{3-x}dx=\int_0^1(4t)^3\sqrt{4-4t}4dt=2^9\int_0^1 t^{4-1}(1-t)^{\frac{3}{2}-1}dt$$
$$=2^9B\left(4,\frac{3}{2}\right)=2^9\frac{\Gamma(4)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}=2^9\frac{3!\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\frac{9}{2}\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}=\frac{16384}{315}$$

となります。 □

(4) $t=\dfrac{5x}{x+4}$ と置換しましょう。$x=\dfrac{4t}{5-t}$ となりますので、$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{20}{(5-t)^2}$ となります。また、$x=0$ のとき $t=0$、$x=1$ のとき $t=1$ です。よって、

$$\int_0^1\frac{\sqrt{x^5(1-x)^3}}{(x+4)^6}dx=\int_0^1\frac{\sqrt{\left(\frac{4t}{5-t}\right)^5\left(1-\frac{4t}{5-t}\right)^3}}{\left(\frac{4t}{5-t}+4\right)^6}\frac{20}{(5-t)^2}dt$$
$$=\frac{1}{4000\sqrt{5}}\int_0^1 t^{\frac{7}{2}-1}(1-t)^{\frac{5}{2}-1}dt=\frac{1}{4000\sqrt{5}}B\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{4000\sqrt{5}}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)}=\frac{1}{4000\sqrt{5}}\frac{\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{5!}$$
$$=\frac{3\pi}{1024000\sqrt{5}}$$

となります。 □

(5) $x=\sin^2\theta$ と置換しましょう。$\dfrac{dx}{d\theta}=2\sin\theta\cos\theta$ となるので、積分範囲に置いて $\sin\theta\geq 0$ および $\cos\theta\geq 0$ であることに注意すると、

$$\frac{d\theta}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{1}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{2\sqrt{\sin^2\theta}\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

となります。また、$\theta=0$ のとき $x=0$、$\theta=\pi/2$ のとき $x=1$ です。よって、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^4\theta\sin^6\theta}{\left(4\cos^2\theta+5\sin^2\theta\right)^6}d\theta=\int_0^1\frac{(1-x)^2x^3}{(4(1-x)+5x)^6}\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\sqrt{x^5(1-x)^3}}{(4+x)^6}dx$$

となります。最後の積分の部分は (4) の問題と同じものですので、

$$=\frac{1}{2}\frac{3\pi}{1024000\sqrt{5}}=\frac{3\pi}{2048000\sqrt{5}}$$

となります。 □