9　統計的仮説検定

期末試験には電卓を持参のこと（平方根の計算できるもの、関数電卓でもよい）。必要な数表は配布する。なお、最尤法からは出題しない。

9.4　中心極限定理を用いた検定

例 9.1. (政策支持率) ある放送局が 1600 人を無作為に選び、ある税制改正案を支持するか否かを調べたところ 850 人 (53.1%) が支持すると答えた。この改正案は国民の半数を超える支持を得ているといえるかについて検定する。

$$H_0 : p = 0.5 \quad 対 \quad H_1 : p > 0.5$$

を有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定する。

$$Z = \frac{0.531 - 0.50}{\sqrt{\frac{0.5\times 0.5}{1600}}} = 2.50$$

であり、$z_{0.05} = 1.645$ であるから、帰無仮説 H_0 は棄却される。すなわち、国民の半数を超える支持が得られていると判断される。□

9.5　2 標本問題

新旧 2 種類の農法があり、新しい農法が従来の農法に比べて優れているかどうかを実験する。農地 18 区画と 20 区画を無作為に選び、それぞれ新しい農法と従来の農法で実験する。

新しい農法を適用した区画の収穫量を $X_1, X_2, \ldots, X_{18}$ と表し、これらは正規母集団 $N(\mu_1, \sigma^2)$ からの無作為標本であるとみなす。標本平均と標本分散を $\bar{X} = \frac{1}{18}\sum_{i=1}^{18} X_i$、$s_1^2 = \frac{1}{17}\sum_{i=1}^{18}(X_i - \bar{X})^2$ と置き、これらの実現値が

$$\bar{X} = 70,\ s_1^2 = (12)^2$$

であったとする。

従来の農法の収穫量を $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{20}$ と表し、これらは正規母集団 $N(\mu_2, \sigma^2)$ からの無作為標本であるとみなす。標本平均と標本分散を $\bar{Y} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} Y_i$、$s_2^2 = \frac{1}{19}\sum_{i=1}^{20}(Y_i - \bar{Y})^2$ と置き、これらの実現値が

$$\bar{Y} = 65,\ s^2 = (15)^2$$

であったとする。

ここでの関心は

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \ \ 対 \ \ H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

の検定である。

一般に

$$\begin{cases} X_1, \cdots, X_m \text{は互いに独立に } N(\mu_1, \sigma^2) \text{ に従い、} \\ Y_1, \cdots, Y_n \text{は互いに独立に } N(\mu_2, \sigma^2) \text{ に従う} \end{cases}$$

とすると、

$$\cdot \quad \bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma^2}{m}\right), \quad \frac{(m-1)s_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1) \tag{1}$$

$$\cdot \quad \bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad \frac{(n-1)s_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \tag{2}$$

が成り立ち、これらは全て独立である。従って、

$$\cdot \quad \bar{X}-\bar{Y} \sim N\left(\mu_1-\mu_2,\ \sigma^2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\right) \tag{3}$$

$$\cdot \quad \frac{(m+n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2) \tag{4}$$

が成り立つ。ここに、

$$s^2=\frac{1}{m+n-2}\left[(m-1)s_1^2+(n-1)s_2^2\right]=\frac{1}{m+n-2}\left[\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\bar{Y})^2\right]$$

である。若干の計算で

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}} \sim t(m+n-2) \tag{5}$$

となることが示せる。

$$H_0:\mu_1=\mu_2 \quad 対 \quad H_1:\mu_1>\mu_2 \tag{6}$$

に対する有意水準 α の検定を構成しよう。

$$t=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}} \tag{7}$$

と置けば、$H_0:\mu_1=\mu_2$(すなわち $\mu_1-\mu_2=0$) が正しいとき、

$$t \sim t(m+n-2)$$

である。従って、

$$\begin{cases} t>t_\alpha(m+n-2) & \Rightarrow \quad H_0を棄却 \\ t\le t_\alpha(m+n-2) & \Rightarrow \quad H_0を採択 \end{cases} \tag{8}$$

なる検定が得られる (2 標本問題における片側 t 検定)。第 1 種の誤りの確率が α になっていることを確認しよう (各自)。

両側対立仮説の場合、すなわち

$$H_0:\mu_1=\mu_2 \quad 対 \quad H_1:\mu_1\neq\mu_2 \tag{9}$$

の場合は、

$$\begin{cases} |t|>t_{\alpha/2}(m+n-2) & \Rightarrow \quad H_0を棄却 \\ |t|\le t_{\alpha/2}(m+n-2) & \Rightarrow \quad H_0を採択 \end{cases} \tag{10}$$

とすればよい。

農地実験の値を代入すると、

$$s^2=\frac{1}{18+20-2}\left[(18-1)\times 15^2+(20-1)\times 15^2\right]=197,\quad t=\frac{70-65}{\sqrt{197\times\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{20}\right)}}\approx 1.10 \tag{11}$$

となるから、有意水準を $\alpha=0.05$ とすれば、$t_{0.05}(36)=1.688$ であるから、帰無仮説は採択され、新しい農法が従来のものに比べて優れているとは言えないことになる。

9.6　対標本の場合

A,B2 種類の睡眠薬を同じ 10 人に飲ませてその効能を調べ、以下の表を得た。A と B の薬による睡眠時間に差がないという帰無仮説を有意水準 0.05 で検定せよ。

被験者	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	2.0	-0.1	2.1	3.4	-0.5	1.4	2.3	1.6	2.6	3.3
B	1.9	0.1	0.9	1.6	-0.1	0.4	1.0	0.6	0.0	1.9
A-B	0.1	-0.2	1.2	1.8	-0.4	1.0	1.3	1.0	2.6	1.4

差 A-B を $Z_1, \ldots, Z_{10}$ と置き、これらが互いに独立に同一の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うと考えて、

$$H_0 : \mu = 0 \ \text{対} \ H_1 : \mu > 0$$

を検定する。$\bar{Z} = 0.98$、$s^2 = 0.855$ となるので、

$$t = \frac{\bar{Z}}{\sqrt{s^2/10}} = \frac{0.98}{\sqrt{0.855/10}} = 3.35$$

となる。他方、臨界値は $t_{0.05}(9) = 1.833$ であるから、帰無仮説は棄却され、A の方が効果が大であると結論される。

9.7　2 つの比率の差の検定

n_1 =548 人の男子高校生と n_2 =582 人の女子高校生に対し、どのような事柄について親と意見を異にするかの調査をした。以下の数値は提示された項目に「親と意見が合わない」と答えた男女生徒の比率である。男女間で比率が異なるか否かについてそれぞれ有意水準 0.05 で検定せよ。

項目	男 $\hat{p}_1$	女 $\hat{p}_2$
友達の選択	0.243	0.272
大学への進学	0375	0.298
服の選択	0.152	0.256
家事の手伝い	0.192	0.260
夜間の外出	0.458	0.486

各項目について検定統計量を計算するとその値は次表の通り: $\hat{p} = (n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2)/(n_1 + n_2)$ と置く。

項目	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$	$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$
友達の選択	-0.029	-1.114
大学への進学	0.077	2.740
服の選択	-0.104	-4.324
家事の手伝い	-0.068	-2.727
夜間の外出	-0.028	-0.942

検定統計量の値の絶対値が $z_{0.025} = 1.96$ を超えるのは、「大学への進学」「服の選択」「家事の手伝い」の３つである。よってこれらの項目は男女間で差があると言える。

正規分布表

ａに対して、Φ(a)を与える。但し、Φ(a) は標準正規分布の分布関数である。

すなわち、Z～N(0,1) のとき、Φ(a) = P(Z≦a) .　　153頁(4.5.11)式を参照のこと。

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.532	0.536
0.1	0.540	0.544	0.548	0.552	0.556	0.560	0.564	0.567	0.571	0.575
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.610	0.614
0.3	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652
0.4	0.655	0.659	0.663	0.666	0.670	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688
0.5	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722
0.6	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785
0.8	0.788	0.791	0.794	0.797	0.800	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813
0.9	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839
1.0	0.841	0.844	0.846	0.848	0.851	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.9990324	0.9990646	0.9990957	0.9991260	0.9991553	0.9991836	0.9992112	0.9992378	0.9992636	0.9992886
3.2	0.9993129	0.9993363	0.9993590	0.9993810	0.9994024	0.9994230	0.9994429	0.9994623	0.9994810	0.9994991
3.3	0.9995166	0.9995335	0.9995499	0.9995658	0.9995811	0.9995959	0.9996103	0.9996242	0.9996376	0.9996505
3.4	0.9996631	0.9996752	0.9996869	0.9996982	0.9997091	0.9997197	0.9997299	0.9997398	0.9997493	0.9997585
3.5	0.9997674	0.9997759	0.9997842	0.9997922	0.9997999	0.9998074	0.9998146	0.9998215	0.9998282	0.9998347
3.6	0.9998409	0.9998469	0.9998527	0.9998583	0.9998637	0.9998689	0.9998739	0.9998787	0.9998834	0.9998879
3.7	0.9998922	0.9998964	0.9999004	0.9999043	0.9999080	0.9999116	0.9999150	0.9999184	0.9999216	0.9999247
3.8	0.9999277	0.9999305	0.9999333	0.9999359	0.9999385	0.9999409	0.9999433	0.9999456	0.9999478	0.9999499
3.9	0.9999519	0.9999539	0.9999557	0.9999575	0.9999593	0.9999609	0.9999625	0.9999641	0.9999655	0.9999670
4.0	0.9999683	0.9999696	0.9999709	0.9999721	0.9999733	0.9999744	0.9999755	0.9999765	0.9999775	0.9999784

カイ2乗分布表: Y が自由度 m のカイ2乗分布に従うとしたとき、Y の上側 100α％点を与える。

すなわち、P(Y ≧ u) = α となる u を与える。ここで、u はテキスト229頁の $\chi2_{\alpha}$(m) に等しい

自由度m ＼ α	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01
1	0.00016	0.00098	0.0039	3.84	5.02	6.63
2	0.020	0.051	0.10	5.99	7.38	9.21
3	0.11	0.22	0.35	7.81	9.35	11.34
4	0.30	0.48	0.71	9.49	11.14	13.28
5	0.55	0.83	1.15	11.07	12.83	15.09
6	0.87	1.24	1.64	12.59	14.45	16.81
7	1.24	1.69	2.17	14.07	16.01	18.48
8	1.65	2.18	2.73	15.51	17.53	20.09
9	2.09	2.70	3.33	16.92	19.02	21.67
10	2.56	3.25	3.94	18.31	20.48	23.21
11	3.05	3.82	4.57	19.68	21.92	24.72
12	3.57	4.40	5.23	21.03	23.34	26.22
13	4.11	5.01	5.89	22.36	24.74	27.69
14	4.66	5.63	6.57	23.68	26.12	29.14
15	5.23	6.26	7.26	25.00	27.49	30.58
16	5.81	6.91	7.96	26.30	28.85	32.00
17	6.41	7.56	8.67	27.59	30.19	33.41
18	7.01	8.23	9.39	28.87	31.53	34.81
19	7.63	8.91	10.12	30.14	32.85	36.19
20	8.26	9.59	10.85	31.41	34.17	37.57
21	8.90	10.28	11.59	32.67	35.48	38.93
22	9.54	10.98	12.34	33.92	36.78	40.29
23	10.20	11.69	13.09	35.17	38.08	41.64
24	10.86	12.40	13.85	36.42	39.36	42.98
25	11.52	13.12	14.61	37.65	40.65	44.31
26	12.20	13.84	15.38	38.89	41.92	45.64
27	12.88	14.57	16.15	40.11	43.19	46.96
28	13.56	15.31	16.93	41.34	44.46	48.28
29	14.26	16.05	17.71	42.56	45.72	49.59
30	14.95	16.79	18.49	43.77	46.98	50.89
31	15.66	17.54	19.28	44.99	48.23	52.19
32	16.36	18.29	20.07	46.19	49.48	53.49
33	17.07	19.05	20.87	47.40	50.73	54.78
34	17.79	19.81	21.66	48.60	51.97	56.06
35	18.51	20.57	22.47	49.80	53.20	57.34
36	19.23	21.34	23.27	51.00	54.44	58.62
37	19.96	22.11	24.07	52.19	55.67	59.89
38	20.69	22.88	24.88	53.38	56.90	61.16
39	21.43	23.65	25.70	54.57	58.12	62.43
40	22.16	24.43	26.51	55.76	59.34	63.69
41	22.91	25.21	27.33	56.94	60.56	64.95
42	23.65	26.00	28.14	58.12	61.78	66.21
43	24.40	26.79	28.96	59.30	62.99	67.46
44	25.15	27.57	29.79	60.48	64.20	68.71
45	25.90	28.37	30.61	61.66	65.41	69.96
46	26.66	29.16	31.44	62.83	66.62	71.20
47	27.42	29.96	32.27	64.00	67.82	72.44
48	28.18	30.75	33.10	65.17	69.02	73.68
49	28.94	31.55	33.93	66.34	70.22	74.92
50	29.71	32.36	34.76	67.50	71.42	76.15
60	37.48	40.48	43.19	79.08	83.30	88.38
70	45.44	48.76	51.74	90.53	95.02	100.43
80	53.54	57.15	60.39	101.88	106.63	112.33
90	61.75	65.65	69.13	113.15	118.14	124.12
100	70.06	74.22	77.93	124.34	129.56	135.81

t分布表：

ｔ が自由度mのｔ分布に従うとしたとき、ｔの上側 100α％点を与える。(テキスト228頁参照)

すなわち、$P(t \geqq u) = \alpha$ となる u を与える。ここで $u = t_{\alpha}(m)$ である。

自由度m ＼ α	0.1	0.05	0.025	0.01
1	3.078	6.314	12.706	31.821
2	1.886	2.920	4.303	6.965
3	1.638	2.353	3.182	4.541
4	1.533	2.132	2.776	3.747
5	1.476	2.015	2.571	3.365
6	1.440	1.943	2.447	3.143
7	1.415	1.895	2.365	2.998
8	1.397	1.860	2.306	2.896
9	1.383	1.833	2.262	2.821
10	1.372	1.812	2.228	2.764
11	1.363	1.796	2.201	2.718
12	1.356	1.782	2.179	2.681
13	1.350	1.771	2.160	2.650
14	1.345	1.761	2.145	2.624
15	1.341	1.753	2.131	2.602
16	1.337	1.746	2.120	2.583
17	1.333	1.740	2.110	2.567
18	1.330	1.734	2.101	2.552
19	1.328	1.729	2.093	2.539
20	1.325	1.725	2.086	2.528
21	1.323	1.721	2.080	2.518
22	1.321	1.717	2.074	2.508
23	1.319	1.714	2.069	2.500
24	1.318	1.711	2.064	2.492
25	1.316	1.708	2.060	2.485
26	1.315	1.706	2.056	2.479
27	1.314	1.703	2.052	2.473
28	1.313	1.701	2.048	2.467
29	1.311	1.699	2.045	2.462
30	1.310	1.697	2.042	2.457
31	1.309	1.696	2.040	2.453
32	1.309	1.694	2.037	2.449
33	1.308	1.692	2.035	2.445
34	1.307	1.691	2.032	2.441
35	1.306	1.690	2.030	2.438
36	1.306	1.688	2.028	2.434
37	1.305	1.687	2.026	2.431
38	1.304	1.686	2.024	2.429
39	1.304	1.685	2.023	2.426
40	1.303	1.684	2.021	2.423
41	1.303	1.683	2.020	2.421
42	1.302	1.682	2.018	2.418
43	1.302	1.681	2.017	2.416
44	1.301	1.680	2.015	2.414
45	1.301	1.679	2.014	2.412
46	1.300	1.679	2.013	2.410
47	1.300	1.678	2.012	2.408
48	1.299	1.677	2.011	2.407
49	1.299	1.677	2.010	2.405
50	1.299	1.676	2.009	2.403
60	1.296	1.671	2.000	2.390
70	1.294	1.667	1.994	2.381
80	1.292	1.664	1.990	2.374
90	1.291	1.662	1.987	2.368
100	1.290	1.660	1.984	2.364