

8.3 信頼区間の一覧：中心極限定理に基づく信頼区間

例 8.1. (支持率の推定) 国民の何パーセントが国債の新規発行を支持しているかを調べるため、400 人を無作為に選び、支持不支持の如何について尋ねたところ、 $\bar{X} = 0.6$ であった。国民全体における支持率 p の 99% 信頼区間は

$$\left[0.6 \pm 2.58 \times \sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{400}} \right] = [0.537, 0.663] = [53.7, 66.3](\%)$$

である。□

例 8.2. (必要な標本の大きさ) 洗剤「ホワイト A」を使っている世帯の比率 p を推定したい。 n 世帯を調査し、第 i 番目の世帯の調査結果を X_i で表し、ホワイト A を使っていれば 1、そうでなければ 0 で表す。ホワイト A を使っている世帯の割合 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ と p の差が少なくとも 95% の確率で 0.03 以下となるようにしたい。 n は幾ら必要か。

9 統計的仮説検定

期末試験には電卓を持参のこと（平方根の計算できるもの、関数電卓でもよい）。必要な数表は配布する。なお、最尤法からは出題しない。

9.1 正規母集団の母平均の検定

(i) 母分散 σ^2 が既知の場合:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{対} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad (1)$$

なる仮説の検定問題を考える。

定理 1. (母平均の検定) X_1, X_2, \dots, X_n は正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の無作為標本とする。このとき、 $T = (\bar{X} - \mu_0) / \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$ とおけば、

$$\begin{cases} |T| > z_{\alpha/2} & \Rightarrow H_0 \text{を棄却する} \\ |T| \leq z_{\alpha/2} & \Rightarrow H_0 \text{を採択する} \end{cases} \quad (2)$$

は検定仮説 (1) に対する有意水準 α の検定である。

例 9.1. (電球の寿命) ある白熱電球の寿命の平均は 1700(時間) であると言う。いま、新型の電球が開発され明るさが改良されたが、寿命が変化したか否かについては不明であるとする。電球の寿命は新型も従来のもも正規分布をなし、その標準偏差は $\sigma = 180$ 時間であることが分かっている。

そこで、新型電球 16 個を無作為に選び、その寿命 X_1, X_2, \dots, X_{16} を計測したところ、 \bar{X} の実現値として $\bar{X} = 1835$ なる結果が得られた。

X_1, X_2, \dots, X_{16} を正規母集団 $N(\mu, (180)^2)$ からの無作為標本とみなし、

$$H_0 : \mu = 1700 \quad \text{対} \quad H_1 : \mu \neq 1700$$

を有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定する。

$$T = \frac{\bar{X} - 1700}{\sqrt{(180)^2/16}} = \frac{1835 - 1700}{\sqrt{(180)^2/16}} = 3$$

である。他方、臨界値は $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$ であるから、 $|T| > z_{0.025}$ が成り立ち、帰無仮説 H_0 は棄却される。即ち、電球の寿命は変化したと言える。

(ii) 母分散が未知の場合

定理 2. (母平均の t 検定) X_1, X_2, \dots, X_n は正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の無作為標本とする。このとき、

$$\begin{cases} |t| > t_{\alpha/2}(n-1) \Rightarrow H_0 \text{を棄却する} \\ |t| \leq t_{\alpha/2}(n-1) \Rightarrow H_0 \text{を採択する} \end{cases} \quad (3)$$

は、検定問題 (1) に対する有意水準 α の検定である。ここに $t_{\alpha/2}(n-1)$ は $t(n-1)$ の上側 $100\alpha/2\%$ 点である。

例 9.2. (電球の寿命) 前節の電球寿命の例において母分散 σ^2 を未知とする。 $s^2 = (200)^2$ であったとする。検定問題

$$H_0 : \mu = 1700 \quad H_1 : \mu \neq 1700$$

を考える。有意水準 $\alpha = 0.05$ とする。

$$t = \frac{\bar{X} - 1700}{\sqrt{s^2/16}} = \frac{1835 - 1700}{\sqrt{(200)^2/16}} = 2.7$$

である。他方、臨界値 $t_{0.025}(15) = 2.131$ であるから、 $|t| > t_{0.025}(15)$ が成り立ち、帰無仮説 H_0 は棄却される。

9.2 正規母集団の母分散の検定

例 ある中学校では例年同じレベルの常識確認テストを行っていたが、従来は平均 50 で分散 36 であった。本年度は学区内に大規模住宅が建ったため、転入する生徒が多数に上った。本年度の生徒について 25 人をランダムに選び、例年と同じ条件でテストしたところ、平均 53 で分散 48 を得た。本年度は生徒の揃い方が例年と違うと見てよいか。

(解答) 本年度の児童のテストの結果を X_1, \dots, X_{25} で表し、これらは互いに独立に同一の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うものとする。帰無仮説 $H_0 : \sigma^2 = 36$ を対立仮説 $H_1 : \sigma^2 \neq 36$ に対して有意水準 0.05 で検定する。検定方式は、

$$Y = \frac{(25-1)s^2}{36}$$

とおくとき、

$$\begin{aligned} Y < \chi_{0.975}^2(24) \text{ or } \chi_{0.025}^2(24) < Y &\Rightarrow H_0 \text{を棄却} \\ \chi_{0.975}^2(24) \leq Y \leq \chi_{0.025}^2(24) &\Rightarrow H_0 \text{を採択する} \end{aligned} \quad (4)$$

というものである。

$$\chi_{0.975}^2(24) = 12.40, \chi_{0.025}^2(24) = 39.36, s^2 = 48, Y = \frac{(25-1) \times 48}{36} = 32.$$

であるから、帰無仮説 H_0 は採択される。従って、本年度は児童の揃い方が例年と違うとは言えない。

帰無仮説 $H_0 : \sigma^2 = 36$ を対立仮説 $H_1 : \sigma^2 > 36$ に対して検定するということも考えられる。この場合、検定方式は、

$$\begin{aligned} Y > \chi_{0.05}^2(24) &\Rightarrow H_0 \text{を棄却する} \\ Y \leq \chi_{0.05}^2(24) &\Rightarrow H_0 \text{を採択する} \end{aligned} \quad (5)$$

となる。 $\chi_{0.05}^2(24) = 36.42$ であるから、 H_0 は採択される。

9.3 中心極限定理を用いた検定

例 9.3. (政策支持率) ある放送局が 1600 人を無作為に選び、ある税制改正案を支持するか否かを調べたところ 850 人 (53.1%) が支持すると答えた。この改正案は国民の半数を超える支持を得ているといえるかについて検定する。

定理??において $n = 1600$ 、 $\bar{X} = 0.531$ 、 $p_0 = 0.5$ として、

$$H_0 : p = 0.5 \quad H_1 : p > 0.5$$

を有意水準 $\alpha = 0.01$ で検定する。 $Z = (0.531 - 0.50) / \sqrt{0.5 \times 0.5 / 1600} = 2.50$ であり、 $z_{0.01} = 2.33$ であるから、帰無仮説 H_0 は棄却される。すなわち、国民の半数を超える支持が得られていると判断される。□

正規分布表

a に対して、 $\Phi(a)$ を与える。但し、 $\Phi(a)$ は標準正規分布の分布関数である。

すなわち、 $Z \sim N(0,1)$ のとき、 $\Phi(a) = P(Z \leq a)$.

153頁(4.5.11)式を参照のこと。

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.532	0.536
0.1	0.540	0.544	0.548	0.552	0.556	0.560	0.564	0.567	0.571	0.575
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.610	0.614
0.3	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652
0.4	0.655	0.659	0.663	0.666	0.670	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688
0.5	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722
0.6	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785
0.8	0.788	0.791	0.794	0.797	0.800	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813
0.9	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839
1.0	0.841	0.844	0.846	0.848	0.851	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.9990324	0.9990646	0.9990957	0.9991260	0.9991553	0.9991836	0.9992112	0.9992378	0.9992636	0.9992886
3.2	0.9993129	0.9993363	0.9993590	0.9993810	0.9994024	0.9994230	0.9994429	0.9994623	0.9994810	0.9994991
3.3	0.9995166	0.9995335	0.9995499	0.9995658	0.9995811	0.9995959	0.9996103	0.9996242	0.9996376	0.9996505
3.4	0.9996631	0.9996752	0.9996869	0.9996982	0.9997091	0.9997197	0.9997299	0.9997398	0.9997493	0.9997585
3.5	0.9997674	0.9997759	0.9997842	0.9997922	0.9997999	0.9998074	0.9998146	0.9998215	0.9998282	0.9998347
3.6	0.9998409	0.9998469	0.9998527	0.9998583	0.9998637	0.9998689	0.9998739	0.9998787	0.9998834	0.9998879
3.7	0.9998922	0.9998964	0.9999004	0.9999043	0.9999080	0.9999116	0.9999150	0.9999184	0.9999216	0.9999247
3.8	0.9999277	0.9999305	0.9999333	0.9999359	0.9999385	0.9999409	0.9999433	0.9999456	0.9999478	0.9999499
3.9	0.9999519	0.9999539	0.9999557	0.9999575	0.9999593	0.9999609	0.9999625	0.9999641	0.9999655	0.9999670
4.0	0.9999683	0.9999696	0.9999709	0.9999721	0.9999733	0.9999744	0.9999755	0.9999765	0.9999775	0.9999784

カイ2乗分布表: Y が自由度 m のカイ2乗分布に従うとしたとき、 Y の上側 $100\alpha\%$ 点を与える。

すなわち、 $P(Y \geq u) = \alpha$ となる u を与える。ここで、 u はテキスト229頁の $\chi^2_{\alpha}(m)$ に等しい

自由度 m \ α	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01
1	0.00016	0.00098	0.0039	3.84	5.02	6.63
2	0.020	0.051	0.10	5.99	7.38	9.21
3	0.11	0.22	0.35	7.81	9.35	11.34
4	0.30	0.48	0.71	9.49	11.14	13.28
5	0.55	0.83	1.15	11.07	12.83	15.09
6	0.87	1.24	1.64	12.59	14.45	16.81
7	1.24	1.69	2.17	14.07	16.01	18.48
8	1.65	2.18	2.73	15.51	17.53	20.09
9	2.09	2.70	3.33	16.92	19.02	21.67
10	2.56	3.25	3.94	18.31	20.48	23.21
11	3.05	3.82	4.57	19.68	21.92	24.72
12	3.57	4.40	5.23	21.03	23.34	26.22
13	4.11	5.01	5.89	22.36	24.74	27.69
14	4.66	5.63	6.57	23.68	26.12	29.14
15	5.23	6.26	7.26	25.00	27.49	30.58
16	5.81	6.91	7.96	26.30	28.85	32.00
17	6.41	7.56	8.67	27.59	30.19	33.41
18	7.01	8.23	9.39	28.87	31.53	34.81
19	7.63	8.91	10.12	30.14	32.85	36.19
20	8.26	9.59	10.85	31.41	34.17	37.57
21	8.90	10.28	11.59	32.67	35.48	38.93
22	9.54	10.98	12.34	33.92	36.78	40.29
23	10.20	11.69	13.09	35.17	38.08	41.64
24	10.86	12.40	13.85	36.42	39.36	42.98
25	11.52	13.12	14.61	37.65	40.65	44.31
26	12.20	13.84	15.38	38.89	41.92	45.64
27	12.88	14.57	16.15	40.11	43.19	46.96
28	13.56	15.31	16.93	41.34	44.46	48.28
29	14.26	16.05	17.71	42.56	45.72	49.59
30	14.95	16.79	18.49	43.77	46.98	50.89
31	15.66	17.54	19.28	44.99	48.23	52.19
32	16.36	18.29	20.07	46.19	49.48	53.49
33	17.07	19.05	20.87	47.40	50.73	54.78
34	17.79	19.81	21.66	48.60	51.97	56.06
35	18.51	20.57	22.47	49.80	53.20	57.34
36	19.23	21.34	23.27	51.00	54.44	58.62
37	19.96	22.11	24.07	52.19	55.67	59.89
38	20.69	22.88	24.88	53.38	56.90	61.16
39	21.43	23.65	25.70	54.57	58.12	62.43
40	22.16	24.43	26.51	55.76	59.34	63.69
41	22.91	25.21	27.33	56.94	60.56	64.95
42	23.65	26.00	28.14	58.12	61.78	66.21
43	24.40	26.79	28.96	59.30	62.99	67.46
44	25.15	27.57	29.79	60.48	64.20	68.71
45	25.90	28.37	30.61	61.66	65.41	69.96
46	26.66	29.16	31.44	62.83	66.62	71.20
47	27.42	29.96	32.27	64.00	67.82	72.44
48	28.18	30.75	33.10	65.17	69.02	73.68
49	28.94	31.55	33.93	66.34	70.22	74.92
50	29.71	32.36	34.76	67.50	71.42	76.15
60	37.48	40.48	43.19	79.08	83.30	88.38
70	45.44	48.76	51.74	90.53	95.02	100.43
80	53.54	57.15	60.39	101.88	106.63	112.33
90	61.75	65.65	69.13	113.15	118.14	124.12
100	70.06	74.22	77.93	124.34	129.56	135.81

t分布表: t が自由度mの t 分布に従うとしたとき、t の上側 100 α %点を与える。(テキスト228頁参照)
すなわち、 $P(t \geq u) = \alpha$ となる u を与える。ここで $u = t_{\alpha}(m)$ である。

自由度m \ α	0.1	0.05	0.025	0.01
1	3.078	6.314	12.706	31.821
2	1.886	2.920	4.303	6.965
3	1.638	2.353	3.182	4.541
4	1.533	2.132	2.776	3.747
5	1.476	2.015	2.571	3.365
6	1.440	1.943	2.447	3.143
7	1.415	1.895	2.365	2.998
8	1.397	1.860	2.306	2.896
9	1.383	1.833	2.262	2.821
10	1.372	1.812	2.228	2.764
11	1.363	1.796	2.201	2.718
12	1.356	1.782	2.179	2.681
13	1.350	1.771	2.160	2.650
14	1.345	1.761	2.145	2.624
15	1.341	1.753	2.131	2.602
16	1.337	1.746	2.120	2.583
17	1.333	1.740	2.110	2.567
18	1.330	1.734	2.101	2.552
19	1.328	1.729	2.093	2.539
20	1.325	1.725	2.086	2.528
21	1.323	1.721	2.080	2.518
22	1.321	1.717	2.074	2.508
23	1.319	1.714	2.069	2.500
24	1.318	1.711	2.064	2.492
25	1.316	1.708	2.060	2.485
26	1.315	1.706	2.056	2.479
27	1.314	1.703	2.052	2.473
28	1.313	1.701	2.048	2.467
29	1.311	1.699	2.045	2.462
30	1.310	1.697	2.042	2.457
31	1.309	1.696	2.040	2.453
32	1.309	1.694	2.037	2.449
33	1.308	1.692	2.035	2.445
34	1.307	1.691	2.032	2.441
35	1.306	1.690	2.030	2.438
36	1.306	1.688	2.028	2.434
37	1.305	1.687	2.026	2.431
38	1.304	1.686	2.024	2.429
39	1.304	1.685	2.023	2.426
40	1.303	1.684	2.021	2.423
41	1.303	1.683	2.020	2.421
42	1.302	1.682	2.018	2.418
43	1.302	1.681	2.017	2.416
44	1.301	1.680	2.015	2.414
45	1.301	1.679	2.014	2.412
46	1.300	1.679	2.013	2.410
47	1.300	1.678	2.012	2.408
48	1.299	1.677	2.011	2.407
49	1.299	1.677	2.010	2.405
50	1.299	1.676	2.009	2.403
60	1.296	1.671	2.000	2.390
70	1.294	1.667	1.994	2.381
80	1.292	1.664	1.990	2.374
90	1.291	1.662	1.987	2.368
100	1.290	1.660	1.984	2.364