7　統計量

7.1　基本定理

次の 2 つの主張は表現が異なるだけで内容は全く同じである：

1. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は互いに独立に同一の分布 F に従うものとする。分布 F の平均を μ、分散を σ^2 と置く。このとき、標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ は次式を満たす：

$$E(\bar{X}) = \mu, \quad V(\bar{X}) = \sigma^2/n.$$

2. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は母平均 μ、母分散 σ^2 の母集団からの無作為標本であるとする。このとき、標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ は次式を満たす：

$$E(\bar{X}) = \mu, \quad V(\bar{X}) = \sigma^2/n.$$

7.2　標本平均の標本分布：母分散が未知の場合

例 7.1. (新型電球の寿命)(続き) 新型電球の寿命を調べるため、新型電球 $n = 15$ 個を取り出して、その寿命 $X_1, \cdots, X_{15}$(単位は時間) を計測する。$X_1, \cdots, X_{15}$ は互いに独立に同一の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うと考えてよいとする。

まず次の事実を確認してから本題に入る。$t \sim t(14)$ ならば、付表 2 より

$$P(-2.145 \leq t \leq 2.145) = 0.95 \tag{1}$$

が読み取れる (数表の記号では $t_{0.025}(14) = 2.145$)。

今の場合、

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{s}$$

は自由度 $n - 1 = 14$ の t 分布 $t(14)$ に従う。よって、従って、(1) より、

$$P\left(-2.145 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \leq 2.145\right) = 0.95 \quad \therefore P\left(\bar{X} - 2.145\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 2.145\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 0.95 \tag{2}$$

即ち、区間

$$\left[\bar{X} - 2.145\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + 2.145\frac{s}{\sqrt{n}}\right] \tag{3}$$

は確率 0.95 で未知の μ を含む。$s^2 = 120^2$ であったとすると、この区間の実現値は

$$\left[1230 - 2.145 \times \frac{120}{\sqrt{15}},\ 1230 + 2.145 \times \frac{120}{\sqrt{15}}\right] = [1163.5,\ 1296.5] \tag{4}$$

となる。//

8 統計的推定

8.1 点推定の例題

ある高校の生徒の 1 週間の勉強時間の分布は正規分布 $N(\mu, 4^2)$ であるとする。μ の推定に興味があるものとする。そのため、25 人を無作為に選び、各人の勉強時間を $X_1, X_2, \ldots, X_{25}$ で表し、その標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} X_i$ で μ を推定するものとする。このとき、推定誤差は

$$|\bar{X} - \mu|$$

で表現できる。

1. 確率 95%でこの推定誤差はどの程度の値で抑えられるか。
2. 確率 95%で推定誤差を 1.0 以下としたい。そのためには標本の大きさ n をどのように選べばよいか。

8.2 推定：信頼区間一覧 (正規母集団の場合)

信頼区間の導き方については、既に講義で扱っているので、これらを公式の形でまとめておく。以下、信頼係数は全て $1-\alpha$ とする。$X_1, \cdots, X_n$ は正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の無作為標本とする。

[1] 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ の母平均 μ の信頼区間 (母分散 σ^2 既知の場合):

$Z \sim N(0,1)$ のとき、Z の上側 100α%点を Z_α と書く。即ち、

$$P(Z > Z_\alpha) = \alpha. \tag{5}$$

既に学んだ通り、

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1) \tag{6}$$

であるから、

$$P\left(-Z_{\alpha/2} \le \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \le Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \text{ 故に } P\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \le \mu \le \bar{X} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1 - \alpha \tag{7}$$

が成立する。従って、μ に関する信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は以下の通りとなる。

$$\left[\bar{X} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}},\ \ \bar{X} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right] \tag{8}$$

[2] 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ の母平均 μ の信頼区間 (母分散 σ^2 未知の場合):

$t \sim t(n-1)$ のとき、t の上側 100α%点を $t_\alpha(n-1)$ と書く。即ち、

$$P(t > t_\alpha(n-1)) = \alpha. \tag{9}$$

既に学んだ通り、$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ とおけば

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \sim t(n-1) \tag{10}$$

であるから、

$$P\left(-t_{\alpha/2}(n-1) \le \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \le t_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \text{ 故に } P\left(\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \le \mu \le \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 1 - \alpha \tag{11}$$

が成立する。従って、μ に関する信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は以下の通り。

$$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}},\ \ \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right] \tag{12}$$

[3] 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ の母分散 σ^2 の信頼区間: セメントを袋詰めする工程におけるばらつきを調査する。セメントの重量の分布は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ であるものとする。大きさ $n = 24$ の無作為標本に基づいて、σ^2 の 95%信頼区間を導こう。

既に学んだ通り、s^2 を不偏標本分散とすると、

$$Y = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{23s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(23) \tag{13}$$

であるから、カイ 2 乗分布表より、$P(11.69 \leq Y \leq 38.08) = 0.95$ が成り立つから、

$$P\left(11.69 \leq \frac{23s^2}{\sigma^2} \leq 38.08\right) = 0.95 \text{ 故に } P\left(\frac{23s^2}{38.08} \leq \sigma^2 \leq \frac{23s^2}{11.69}\right) = 0.95 \tag{14}$$

が成立する。同様に、$P(\sqrt{23s^2/38.08} \leq \sigma \leq \sqrt{23s^2/11.69}) = 0.95$ も成り立つ。従って、σ^2 と σ に関する信頼係数 0.95 の信頼区間は以下の通り。

$$\left[\frac{23s^2}{38.08},\ \ \frac{23s^2}{11.69}\right],\ \ \left[\sqrt{\frac{23s^2}{38.08}},\ \ \sqrt{\frac{23s^2}{11.69}}\right] \tag{15}$$

例えば、$s^2 = 0.4$ ならば、これらの区間はそれぞれ $[0.242, 0.747]$、$[0.492, 0.887]$ となる。

8.3 信頼区間の一覧：中心極限定理に基づく信頼区間

例 8.1. (支持率の推定) 国民の何パーセントが国債の新規発行を支持しているかを調べるため、400 人を無作為に選び、支持不支持の如何について尋ねたところ、$\bar{X} = 0.6$ であった。国民全体における支持率 p の 99%信頼区間は

$$\left[0.6 \pm 2.58 \times \sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{400}}\right] = [0.537, 0.663] = [53.7, 66.3](\%)$$

である。□

例 8.2. (必要な標本の大きさ) 洗剤「ホワイト A」を使っている世帯の比率 p を推定したい。n 世帯を調査し、第 i 番目の世帯の調査結果を X_i で表し、ホワイト A を使っていれば 1、そうでなければ 0 で表す。ホワイト A を使っている世帯の割合 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ と p の差が少なくとも 95% の確率で 0.03 以下となるようにしたい。n は幾ら必要か。