7　統計量

7.1　基本定理

次の 2 つの主張は表現が異なるだけで内容は全く同じである：

1. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は互いに独立に同一の分布 F に従うものとする。分布 F の平均を μ、分散を σ^2 と置く。このとき、標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ は次式を満たす：
$$E(\bar{X}) = \mu, \quad V(\bar{X}) = \sigma^2/n.$$
2. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は母平均 μ、母分散 σ^2 の母集団からの無作為標本であるとする。このとき、標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ は次式を満たす：
$$E(\bar{X}) = \mu, \quad V(\bar{X}) = \sigma^2/n.$$

7.2　標本平均の標本分布

定理 1. $X_1, \cdots, X_n$ は互いに独立に同一の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うものとする。このとき、
$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad (\text{従って、} Z \equiv \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)). \tag{1}$$

例 7.1. (電球の寿命 – 信頼区間入門) (0) **予備知識.** 話に入る前に公式の復習：$Z \sim N(0,1)$ なら、
$$P(-1.96 \le Z \le 1.96) = 0.95. \tag{2}$$
(i) **モデル.** 大型電球を作る工場で新型の電球が開発されたとする。新型電球は旧型に比べて寿命が長いことが期待されるとする。新型電球の寿命を調べるため、新型電球 $n = 15$ 個を取り出して、その寿命 $X_1, \cdots, X_{15}$(単位は時間) を計測する。$X_1, \cdots, X_{15}$ は互いに独立に同一の正規分布 $N(\mu, 100^2)$ に従うと考えてよいとする：
$$X_1, \cdots, X_{15} \sim N(\mu, 100^2). \tag{3}$$
(ii)μ **の (点) 推定.** 既に勉強した通り、
$$E(\bar{X}) = \mu \tag{4}$$
であるから、未知の μ を $\bar{X}$ の実現値 $\bar{x}$ によって推定することは妥当であろう。例えば、$\bar{x} = 1230$ であったなら、μ は 1230 と推定される。(iii) μ **の (区間) 推定.** あるいは次のようなアプローチも考えられる。
$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{100^2}{15}\right) \qquad \therefore \ \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{100^2}{15}}} \sim N(0,1) \tag{5}$$
であるから、(2) を利用して、
$$P\left(-1.96 \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{100^2}{15}}} \le 1.96\right) = 0.95 \qquad \therefore P\left(\bar{X} - 1.96\frac{100}{\sqrt{15}} \le \mu \le \bar{X} + 1.96\frac{100}{\sqrt{15}}\right) = 0.95 \tag{6}$$
従って、区間
$$\left[\bar{X} - 1.96\frac{100}{\sqrt{15}}, \ \bar{X} + 1.96\frac{100}{\sqrt{15}}\right] \tag{7}$$
は確率 0.95 で未知の μ を含む。この区間の実現値は
$$\left[1230 - 1.96 \times \frac{100}{\sqrt{15}}, 1230 + 1.96 \times \frac{100}{\sqrt{15}}\right] = [1179.4, 1280.6] \tag{8}$$
である。多くの場合は σ^2 は未知なのでデータから推定しなければならない。

7.3　標本分散の標本分布

例 7.2. (標本分散の変動) まず次の事実を確認してから本題に入る。$Y \sim \chi^2(9)$ ならば、付表より

$$P(Y > 16.92) = 0.05 \tag{9}$$

が読み取れる (数表の記号では $\chi^2_{0.05}(9) = 16.92$)。

$X_1, \cdots, X_{10}$ は互いに独立に同一の正規分布 $N(50, 5^2)$ に従っているものとする。このとき、標本分散 $s^2 = \frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{10}(X_i - \bar{X})^2$ はどれほどばらつくだろうか。例えば

$$P(s^2 > c) = 0.05 \tag{10}$$

となる c は幾らか。

$$Y \equiv \frac{(10-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{9s^2}{5^2} \sim \chi^2(9) \tag{11}$$

に注意すると

$$P(s^2 > c) = P\left(\frac{9s^2}{5^2} > \frac{9c}{5^2}\right) = P\left(Y > \frac{9c}{5^2}\right) = 0.05 \tag{12}$$

であるから、求める c は

$$\frac{9c}{5^2} = 16.92 \tag{13}$$

の解である。従って $c = 47.0$. 同様に考えて、$P(s^2 < d) = 0.05$ となるような d は $9d/5^2 = 3.33$ の解であり、$d = 9.2$. よって、

$$P(9.2 \le s^2 \le 47.0) = 0.90 \tag{14}$$

なることが分かる。もちろん、$P(\sqrt{9.2} \le s \le \sqrt{47.0}) = P(3.03 \le s \le 6.86) = 0.90$. 同様に考えて、$P(7.5 \le s^2 \le 52.8) = 0.95$ も得られる。//

7.4　標本平均の標本分布：母分散が未知の場合

例 7.3. (新型電球の寿命)(続き)

まず次の事実を確認してから本題に入る。$t \sim t(14)$ ならば、付表 2 より

$$P(-2.145 \le t \le 2.145) = 0.95 \tag{15}$$

が読み取れる (数表の記号では $t_{0.025}(14) = 2.145$)。

さて、今度は σ^2 が未知の場合を考えてみよう。この場合、(8) の区間は計算出来ない。そこで

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

とおくと、

$$E(s^2) = \sigma^2$$

が成立するので、未知の σ^2 は s^2 で推定出来るだろう。(8) のような区間を構成しようと考えるならば、未知の σ^2 を s^2 で置き換えた

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{s}$$

を考えるのが自然だろう。ここで t は正規分布しないことに注意する。t は自由度 $n-1$ の t 分布に従う。今の場合は、$t \sim t(14)$。従って、(15) より、

$$P\left(-2.145 \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \leq 2.145\right) = 0.95 \quad \therefore P\left(\bar{X} - 2.145\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 2.145\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 0.95 \tag{16}$$

即ち、区間

$$\left[\bar{X} - 2.145\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + 2.145\frac{s}{\sqrt{n}}\right] \tag{17}$$

は確率 0.95 で未知の μ を含む。$s^2 = 120^2$ であったとすると、この区間の実現値は

$$\left[1230 - 2.145 \times \frac{120}{\sqrt{15}},\ 1230 + 2.145 \times \frac{120}{\sqrt{15}}\right] = [1163.5,\ 1296.5] \tag{18}$$

となる。//

正規分布表

a に対して、Φ(a)を与える。但し、Φ(a) は標準正規分布の分布関数である。

すなわち、Z〜N(0,1) のとき、Φ(a) = P(Z≦a) .　　153頁(4.5.11)式を参照のこと。

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.532	0.536
0.1	0.540	0.544	0.548	0.552	0.556	0.560	0.564	0.567	0.571	0.575
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.610	0.614
0.3	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652
0.4	0.655	0.659	0.663	0.666	0.670	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688
0.5	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722
0.6	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785
0.8	0.788	0.791	0.794	0.797	0.800	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813
0.9	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839
1.0	0.841	0.844	0.846	0.848	0.851	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.9990324	0.9990646	0.9990957	0.9991260	0.9991553	0.9991836	0.9992112	0.9992378	0.9992636	0.9992886
3.2	0.9993129	0.9993363	0.9993590	0.9993810	0.9994024	0.9994230	0.9994429	0.9994623	0.9994810	0.9994991
3.3	0.9995166	0.9995335	0.9995499	0.9995658	0.9995811	0.9995959	0.9996103	0.9996242	0.9996376	0.9996505
3.4	0.9996631	0.9996752	0.9996869	0.9996982	0.9997091	0.9997197	0.9997299	0.9997398	0.9997493	0.9997585
3.5	0.9997674	0.9997759	0.9997842	0.9997922	0.9997999	0.9998074	0.9998146	0.9998215	0.9998282	0.9998347
3.6	0.9998409	0.9998469	0.9998527	0.9998583	0.9998637	0.9998689	0.9998739	0.9998787	0.9998834	0.9998879
3.7	0.9998922	0.9998964	0.9999004	0.9999043	0.9999080	0.9999116	0.9999150	0.9999184	0.9999216	0.9999247
3.8	0.9999277	0.9999305	0.9999333	0.9999359	0.9999385	0.9999409	0.9999433	0.9999456	0.9999478	0.9999499
3.9	0.9999519	0.9999539	0.9999557	0.9999575	0.9999593	0.9999609	0.9999625	0.9999641	0.9999655	0.9999670
4.0	0.9999683	0.9999696	0.9999709	0.9999721	0.9999733	0.9999744	0.9999755	0.9999765	0.9999775	0.9999784

カイ2乗分布表： Y が自由度 m のカイ2乗分布に従うとしたとき、Y の上側 100α%点を与える。

すなわち、P(Y ≧ u) = α となる u を与える。ここで、u はテキスト229頁の χ^2_{α}(m)に等しい

自由度m ＼ α	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01
1	0.00016	0.00098	0.0039	3.84	5.02	6.63
2	0.020	0.051	0.10	5.99	7.38	9.21
3	0.11	0.22	0.35	7.81	9.35	11.34
4	0.30	0.48	0.71	9.49	11.14	13.28
5	0.55	0.83	1.15	11.07	12.83	15.09
6	0.87	1.24	1.64	12.59	14.45	16.81
7	1.24	1.69	2.17	14.07	16.01	18.48
8	1.65	2.18	2.73	15.51	17.53	20.09
9	2.09	2.70	3.33	16.92	19.02	21.67
10	2.56	3.25	3.94	18.31	20.48	23.21
11	3.05	3.82	4.57	19.68	21.92	24.72
12	3.57	4.40	5.23	21.03	23.34	26.22
13	4.11	5.01	5.89	22.36	24.74	27.69
14	4.66	5.63	6.57	23.68	26.12	29.14
15	5.23	6.26	7.26	25.00	27.49	30.58
16	5.81	6.91	7.96	26.30	28.85	32.00
17	6.41	7.56	8.67	27.59	30.19	33.41
18	7.01	8.23	9.39	28.87	31.53	34.81
19	7.63	8.91	10.12	30.14	32.85	36.19
20	8.26	9.59	10.85	31.41	34.17	37.57
21	8.90	10.28	11.59	32.67	35.48	38.93
22	9.54	10.98	12.34	33.92	36.78	40.29
23	10.20	11.69	13.09	35.17	38.08	41.64
24	10.86	12.40	13.85	36.42	39.36	42.98
25	11.52	13.12	14.61	37.65	40.65	44.31
26	12.20	13.84	15.38	38.89	41.92	45.64
27	12.88	14.57	16.15	40.11	43.19	46.96
28	13.56	15.31	16.93	41.34	44.46	48.28
29	14.26	16.05	17.71	42.56	45.72	49.59
30	14.95	16.79	18.49	43.77	46.98	50.89
31	15.66	17.54	19.28	44.99	48.23	52.19
32	16.36	18.29	20.07	46.19	49.48	53.49
33	17.07	19.05	20.87	47.40	50.73	54.78
34	17.79	19.81	21.66	48.60	51.97	56.06
35	18.51	20.57	22.47	49.80	53.20	57.34
36	19.23	21.34	23.27	51.00	54.44	58.62
37	19.96	22.11	24.07	52.19	55.67	59.89
38	20.69	22.88	24.88	53.38	56.90	61.16
39	21.43	23.65	25.70	54.57	58.12	62.43
40	22.16	24.43	26.51	55.76	59.34	63.69
41	22.91	25.21	27.33	56.94	60.56	64.95
42	23.65	26.00	28.14	58.12	61.78	66.21
43	24.40	26.79	28.96	59.30	62.99	67.46
44	25.15	27.57	29.79	60.48	64.20	68.71
45	25.90	28.37	30.61	61.66	65.41	69.96
46	26.66	29.16	31.44	62.83	66.62	71.20
47	27.42	29.96	32.27	64.00	67.82	72.44
48	28.18	30.75	33.10	65.17	69.02	73.68
49	28.94	31.55	33.93	66.34	70.22	74.92
50	29.71	32.36	34.76	67.50	71.42	76.15
60	37.48	40.48	43.19	79.08	83.30	88.38
70	45.44	48.76	51.74	90.53	95.02	100.43
80	53.54	57.15	60.39	101.88	106.63	112.33
90	61.75	65.65	69.13	113.15	118.14	124.12
100	70.06	74.22	77.93	124.34	129.56	135.81

t分布表:

t が自由度mの t 分布に従うとしたとき、t の上側 100α%点を与える。(テキスト228頁参照)

すなわち、$P(t \geqq u) = \alpha$ となる u を与える。ここで $u = t_{\alpha}(m)$ である。

自由度m ＼ α	0.1	0.05	0.025	0.01
1	3.078	6.314	12.706	31.821
2	1.886	2.920	4.303	6.965
3	1.638	2.353	3.182	4.541
4	1.533	2.132	2.776	3.747
5	1.476	2.015	2.571	3.365
6	1.440	1.943	2.447	3.143
7	1.415	1.895	2.365	2.998
8	1.397	1.860	2.306	2.896
9	1.383	1.833	2.262	2.821
10	1.372	1.812	2.228	2.764
11	1.363	1.796	2.201	2.718
12	1.356	1.782	2.179	2.681
13	1.350	1.771	2.160	2.650
14	1.345	1.761	2.145	2.624
15	1.341	1.753	2.131	2.602
16	1.337	1.746	2.120	2.583
17	1.333	1.740	2.110	2.567
18	1.330	1.734	2.101	2.552
19	1.328	1.729	2.093	2.539
20	1.325	1.725	2.086	2.528
21	1.323	1.721	2.080	2.518
22	1.321	1.717	2.074	2.508
23	1.319	1.714	2.069	2.500
24	1.318	1.711	2.064	2.492
25	1.316	1.708	2.060	2.485
26	1.315	1.706	2.056	2.479
27	1.314	1.703	2.052	2.473
28	1.313	1.701	2.048	2.467
29	1.311	1.699	2.045	2.462
30	1.310	1.697	2.042	2.457
31	1.309	1.696	2.040	2.453
32	1.309	1.694	2.037	2.449
33	1.308	1.692	2.035	2.445
34	1.307	1.691	2.032	2.441
35	1.306	1.690	2.030	2.438
36	1.306	1.688	2.028	2.434
37	1.305	1.687	2.026	2.431
38	1.304	1.686	2.024	2.429
39	1.304	1.685	2.023	2.426
40	1.303	1.684	2.021	2.423
41	1.303	1.683	2.020	2.421
42	1.302	1.682	2.018	2.418
43	1.302	1.681	2.017	2.416
44	1.301	1.680	2.015	2.414
45	1.301	1.679	2.014	2.412
46	1.300	1.679	2.013	2.410
47	1.300	1.678	2.012	2.408
48	1.299	1.677	2.011	2.407
49	1.299	1.677	2.010	2.405
50	1.299	1.676	2.009	2.403
60	1.296	1.671	2.000	2.390
70	1.294	1.667	1.994	2.381
80	1.292	1.664	1.990	2.374
90	1.291	1.662	1.987	2.368
100	1.290	1.660	1.984	2.364