6.3 基本定理

定理 1. $X_1, \cdots, X_n$ は互いに独立に同一の確率分布 F に従うものとする。(以後、この仮定を**独立同一分布の仮定**と呼び、$X_1, X_2, \cdots, X_n \overset{\perp\!\!\perp}{\sim} F$ と書くことにする。)

$$E(X_1) = \cdots = E(X_n) \equiv \mu, \quad V(X_1) = \cdots = V(X_n) \equiv \sigma^2$$

と置く。このとき、$X_1, \cdots, X_n$ の平均 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ は次の 2 式を満足する。

$$E(\bar{X}) = \mu, \quad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}. \tag{1}$$

例 6.1. (典型例) n 個の確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ が互いに独立に同一の分布 F に従っているとする．分布 F の平均は μ、分散は σ^2 であるとする。$T = \sum_{i=1}^n X_i$ とおく．このとき，次の結果が得られる．

1. ベルヌーイ分布 $Ber(p)$ の場合。この場合、$\mu = p$，$\sigma^2 = p(1-p)$ であるから，

$$E(\bar{X}) = p, V(\bar{X}) = \frac{p(1-p)}{n} \tag{2}$$
$$E(T) = np, V(T) = np(1-p) \tag{3}$$

2. ポアソン分布 $P_O(\lambda)$ の場合。この場合、$\mu = \lambda$，$\sigma^2 = \lambda$ であるから，

$$E(\bar{X}) = \lambda, V(\bar{X}) = \frac{\lambda}{n} \tag{4}$$
$$E(T) = n\lambda, V(T) = n\lambda \tag{5}$$

3. 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の場合。この場合、

$$E(\bar{X}) = \mu, V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \tag{6}$$
$$E(T) = n\mu, V(T) = n\sigma^2 \tag{7}$$

4. 指数分布 $E_X(\lambda)$ の場合。この場合、$\mu = 1/\lambda$、$\sigma^2 = 1/\lambda^2$ であるから、

$$E(\bar{X}) = 1/\lambda, V(\bar{X}) = \frac{1}{n\lambda^2} \tag{8}$$

その他の確率分布についても同様である．

例 6.2. （応用例）上式とチェビシェフの不等式を組み合わせて、$\bar{X}$ のばらつきを調べよう。

チェビシェフの不等式を復習すると次の通り：確率変数 Z は、平均 $E(Z) = \alpha$、分散 $V(Z) = \beta^2$ であるとする。このとき、

$$P(\alpha - k\beta \leq Z \leq \alpha + k\beta) \geq 1 - 1/k^2.$$

1. あるテレビ番組の視聴率が 20%であったとする（通常この数値は未知だが、今は全知の立場に立つことにする）。400 世帯に視聴の有無について尋ねるとする。回答を X_i $(i = 1, 2, \cdots, 400)$ と表し、視聴していたならば $X_i = 1$、そうでなければ $X_i = 0$ と記録するとする。このとき、$X_1, \cdots, X_{400}$ は互いに独立に同一のベルヌーイ分布 $Ber(0.2)$ に従っていると見なしてよい。このとき、$\bar{X} = (X_1 + X_2 + \cdots + X_{400})/400$ はどれくらいばらつくか。

   上の例の 1. において $p = 0.2$ として、

$$E(\bar{X}) = 0.2, \quad V(\bar{X}) = \frac{0.2 \times 0.8}{400} = 0.0004, \; D(\bar{X}) = \sqrt{0.0004} = 0.02. \tag{9}$$

従って、チェビシェフの不等式より、

$$P(0.2-2\times 0.02 \le \bar{X} \le 0.2+2\times 0.02) = P(0.16 \le \bar{X} \le 0.24) \ge 1-1/2^2 = 3/4 \tag{10}$$

となる。次回示す通り、n が大きいときは元の分布が何であっても、$\bar{X}$ の分布は正規分布で近似することができる（中心極限定理）から、$\bar{X} \sim N(0.2,(0.02)^2)$ が近似的に成り立つ。従って、上式の確率は 95.4%となる。

2. ある測定機器の測定誤差 ϵ は正規分布 $N(0,2^2)$ であるとする。ある測定対象の真の重量を μ とする。従って、測定結果 $X=\mu+\epsilon$ の分布は $N(\mu,2^2)$ となる。この測定機器を用いて、同じ測定対象を独立に 100 回測定し、その結果 $X_1,\ldots,X_{100}$ の平均 $\bar{X}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i$ を計算するものとする。上の例の 3. において $\sigma^2=2^2$ として、

$$E(\bar{X})=\mu,\ \ V(\bar{X})=\frac{2^2}{100}=0.04,\ D(\bar{X})=\sqrt{0.04}=0.2. \tag{11}$$

従って、チェビシェフの不等式より、

$$P(\mu-2\times 0.2 \le \bar{X} \le \mu+2\times 0.2) \ge 1-1/2^2=3/4 \tag{12}$$

となる。次回示す通り、元の分布が正規分布の場合、$\bar{X}$ も正規分布に従うので $\bar{X} \sim N(100,(0.2)^2)$ が成り立つ。従って、上式の確率は 95.4%となる。今の場合は、上式のように表現するよりも、

$$P(\mu-2\times 0.2 \le \bar{X} \le \mu+2\times 0.2) = P(\bar{X}-2\times 0.2 \le \mu \le \bar{X}+2\times 0.2) \ge 1-1/2^2=3/4 \tag{13}$$

と変形した方が応用性がある。例えば、$\bar{X}=24$ であったとすれば、区間 [23.6, 24.4] なる区間が得られ、これは未知の μ を確率 3/4 以上で（正確には 95.4%で）含む区間の実現値である。

6.4　再生性の証明

ベルヌーイ分布、2 項分布、ポアソン分布、正規分布など幾つかの分布は再生性という良い性質を持つ。ポアソン 分布の場合にこれを示しておこう。(一見難しそうだが、実はそれほどでもない。2 項定理が分かれば十分ついてこれる。)

証明すべき内容は、

$$X \sim P_o(\lambda_1),\ Y \sim P_o(\lambda_2),\ X \text{ と } Y \text{ は独立} \ \Rightarrow\ Z \equiv X+Y \sim P_o(\lambda_1+\lambda_2) \tag{14}$$

である。即ち、

$$P(Z=z)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^z}{z!}\ (z=0,1,2,\cdots) \tag{15}$$

を示せばよい。

$$\begin{aligned}
P(Z=z) &= P(X+Y=z)\ \ (Z=X+Y) && (16)\\
&= P\Big(\{X=z,Y=0\}\cup\{X=z-1,Y=1\}\cup\cdots\cup\{X=0,Y=z\}\Big)\ \text{(明らか)} && (17)\\
&= P\Big(\bigcup_{y=0}^{z}\{X=z-y,Y=y\}\Big)\ \text{(単なる書き換え)} && (18)\\
&= \sum_{y=0}^{z}P\Big(\{X=z-y,Y=y\}\Big)\ \ \text{(排反)} && (19)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{y=0}^{z} P\Big(\{X = z-y\}\Big) P\Big(\{Y = y\}\Big) \quad (\text{独立性}) \tag{20}$$

$$= \sum_{y=0}^{z} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^{z-y}}{(z-y)!} \times e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{y}}{y!} \quad (X \sim P_o(\lambda_1),\ Y \sim P_o(\lambda_2)) \tag{21}$$

$$= e^{-\lambda_1} e^{-\lambda_2} \sum_{y=0}^{z} \frac{1}{(z-y)!y!} \times \lambda_1^{z-y} \lambda_2^{y} \quad (\text{単に整理しただけ}) \tag{22}$$

$$= \frac{e^{-\lambda_1} e^{-\lambda_2}}{z!} \sum_{y=0}^{z} \frac{z!}{(z-y)!y!} \times \lambda_1^{z-y} \lambda_2^{y} \quad (\frac{z!}{z!} = 1 \text{ は明らか}) \tag{23}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{z!} \sum_{y=0}^{z} \frac{z!}{(z-y)!y!} \times \lambda_1^{z-y} \lambda_2^{y} \quad (e^A e^B = e^{A+B}) \tag{24}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{z!} \sum_{y=0}^{z} {}_zC_y\ \lambda_1^{z-y} \lambda_2^{y} \quad (2 \text{ 項係数の定義}) \tag{25}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{z!} (\lambda_1 + \lambda_2)^z \quad (2 \text{ 項定理}) \tag{26}$$

これで証明が終わる。

7 統計量

7.1 標本平均の標本分布

定理 2. $X_1, \cdots, X_n$ は互いに独立に同一の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うものとする。このとき、

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad (\text{従って、} Z \equiv \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)). \tag{27}$$

例 7.1. (電球の寿命 – 信頼区間入門) (0) **予備知識.** 話に入る前に公式の復習：$Z \sim N(0,1)$ なら、

$$P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95. \tag{28}$$

(i) **モデル.** 大型電球を作る工場で新型の電球が開発されたとする。新型電球は旧型に比べて寿命が長いことが期待されるとする。新型電球の寿命を調べるため、新型電球 $n = 15$ 個を取り出して、その寿命 $X_1, \cdots, X_{15}$(単位は時間) を計測する。$X_1, \cdots, X_{15}$ は互いに独立に同一の正規分布 $N(\mu, 100^2)$ に従うと考えてよいとする：

$$X_1, \cdots, X_{15} \sim N(\mu, 100^2). \tag{29}$$

(ii)μ **の (点) 推定.** 既に勉強した通り、

$$E(\bar{X}) = \mu \tag{30}$$

であるから、未知の μ を $\bar{X}$ の実現値 $\bar{x}$ によって推定することは妥当であろう。例えば、$\bar{x} = 1230$ であったなら、μ は 1230 と推定される。(iii) μ **の (区間) 推定.** あるいは次のようなアプローチも考えられる。

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{100^2}{15}\right) \qquad \therefore\ \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{100^2}{15}}} \sim N(0,1) \tag{31}$$

であるから、(28) を利用して、

$$P\left(-1.96 \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{100^2}{15}}} \leq 1.96\right) = 0.95 \qquad \therefore P\left(\bar{X} - 1.96\frac{100}{\sqrt{15}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\frac{100}{\sqrt{15}}\right) = 0.95 \tag{32}$$

従って、区間

$$\left[\bar{X} - 1.96\frac{100}{\sqrt{15}},\ \bar{X} + 1.96\frac{100}{\sqrt{15}}\right] \tag{33}$$

は確率 0.95 で未知の μ を含む。この区間の実現値は

$$\left[1230 - 1.96 \times \frac{100}{\sqrt{15}}, 1230 + 1.96 \times \frac{100}{\sqrt{15}}\right] = [1179.4, 1280.6] \tag{34}$$

である。多くの場合は σ^2 は未知なのでデータから推定しなければならない。

カイ2乗分布表： Y が自由度 m のカイ2乗分布に従うとしたとき、Y の上側 100α%点を与える。
すなわち、P(Y ≧ u) = α となる u を与える。ここで、u はテキスト229頁の $\chi 2_{\alpha}$(m)に等しい

自由度m ＼ α	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01
1	0.00016	0.00098	0.0039	3.84	5.02	6.63
2	0.020	0.051	0.10	5.99	7.38	9.21
3	0.11	0.22	0.35	7.81	9.35	11.34
4	0.30	0.48	0.71	9.49	11.14	13.28
5	0.55	0.83	1.15	11.07	12.83	15.09
6	0.87	1.24	1.64	12.59	14.45	16.81
7	1.24	1.69	2.17	14.07	16.01	18.48
8	1.65	2.18	2.73	15.51	17.53	20.09
9	2.09	2.70	3.33	16.92	19.02	21.67
10	2.56	3.25	3.94	18.31	20.48	23.21
11	3.05	3.82	4.57	19.68	21.92	24.72
12	3.57	4.40	5.23	21.03	23.34	26.22
13	4.11	5.01	5.89	22.36	24.74	27.69
14	4.66	5.63	6.57	23.68	26.12	29.14
15	5.23	6.26	7.26	25.00	27.49	30.58
16	5.81	6.91	7.96	26.30	28.85	32.00
17	6.41	7.56	8.67	27.59	30.19	33.41
18	7.01	8.23	9.39	28.87	31.53	34.81
19	7.63	8.91	10.12	30.14	32.85	36.19
20	8.26	9.59	10.85	31.41	34.17	37.57
21	8.90	10.28	11.59	32.67	35.48	38.93
22	9.54	10.98	12.34	33.92	36.78	40.29
23	10.20	11.69	13.09	35.17	38.08	41.64
24	10.86	12.40	13.85	36.42	39.36	42.98
25	11.52	13.12	14.61	37.65	40.65	44.31
26	12.20	13.84	15.38	38.89	41.92	45.64
27	12.88	14.57	16.15	40.11	43.19	46.96
28	13.56	15.31	16.93	41.34	44.46	48.28
29	14.26	16.05	17.71	42.56	45.72	49.59
30	14.95	16.79	18.49	43.77	46.98	50.89
31	15.66	17.54	19.28	44.99	48.23	52.19
32	16.36	18.29	20.07	46.19	49.48	53.49
33	17.07	19.05	20.87	47.40	50.73	54.78
34	17.79	19.81	21.66	48.60	51.97	56.06
35	18.51	20.57	22.47	49.80	53.20	57.34
36	19.23	21.34	23.27	51.00	54.44	58.62
37	19.96	22.11	24.07	52.19	55.67	59.89
38	20.69	22.88	24.88	53.38	56.90	61.16
39	21.43	23.65	25.70	54.57	58.12	62.43
40	22.16	24.43	26.51	55.76	59.34	63.69
41	22.91	25.21	27.33	56.94	60.56	64.95
42	23.65	26.00	28.14	58.12	61.78	66.21
43	24.40	26.79	28.96	59.30	62.99	67.46
44	25.15	27.57	29.79	60.48	64.20	68.71
45	25.90	28.37	30.61	61.66	65.41	69.96
46	26.66	29.16	31.44	62.83	66.62	71.20
47	27.42	29.96	32.27	64.00	67.82	72.44
48	28.18	30.75	33.10	65.17	69.02	73.68
49	28.94	31.55	33.93	66.34	70.22	74.92
50	29.71	32.36	34.76	67.50	71.42	76.15
60	37.48	40.48	43.19	79.08	83.30	88.38
70	45.44	48.76	51.74	90.53	95.02	100.43
80	53.54	57.15	60.39	101.88	106.63	112.33
90	61.75	65.65	69.13	113.15	118.14	124.12
100	70.06	74.22	77.93	124.34	129.56	135.81