5　代表的な確率分布（続き）

5.3　正規分布と指数分布

正規分布の確率計算: $Z \sim N(0,1)$ とする。

$$P(Z \leq z) = \Phi(z), \quad -\infty < z < \infty \tag{1}$$

と置く。$\Phi(z)$ を標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数とする。$\Phi(z)$ の値は、エクセル関数 **normsdist(z)** で計算することが出来る。

基本例：(i) $P(Z \leq 1.96) = \Phi(1.96) = 0.975, \ \ P(Z \leq 1.64) = \Phi(1.64) = 0.949 (= 0.95)$
(ii) $P(Z \leq 1) = \Phi(1) = 0.841, P(Z \leq 2) = \Phi(2) = 0.977, \ \ P(Z \leq 3) = \Phi(3) = 0.999$

すぐ分かる通り、

$$P(a < Z) = 1 - P(Z \leq a) = 1 - \Phi(a) \tag{2}$$

である。例えば、$P(1 < Z) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.841 = 0.159.$

$P(Z \leq -1) = \Phi(-1)$ などの値は、標準正規分布 $N(0,1)$ の密度関数の対称性を使って次のように求まる:

$$\Phi(-1) = P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) = 1 - \Phi(1) = 0.159 \tag{3}$$

公式: $\Phi(z)$ の値が計算出来るようになれば次の公式を使って計算出来る。
(公式) $Z \sim N(0,1)$ なら $P(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
(発展) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ なら $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ なので

$$P(a \leq X \leq b) = P\Big(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\Big) = P\Big(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big)$$

基本例： $Z \sim N(0,1)$ なら、

$$\begin{aligned} P(-1 \leq Z \leq 1) &= \Phi(1) - \Phi(-1) = 0.841 - 0.159 = 0.683, \\ P(-2 \leq Z \leq 2) &= \Phi(2) - \Phi(-2) = 0.977 - 0.023 = 0.954, \\ P(-3 \leq Z \leq 3) &= \Phi(3) - \Phi(-3) = 0.999 - 0.001 = 0.997 \end{aligned} \tag{4}$$

従って、 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ の場合は次の事実が示せる。$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ に注意すると、

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P\left(-1 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 1\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = 0.683 \tag{5}$$

他も同様にして、$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.954, P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.997$ となる。

例 5.1. (コレステロール値)20 歳から 34 歳までの女性のコレステロール値は正規分布に従い、その平均は 185 (mg/dl)、標準偏差は 39 (mg/dl) である。(1) コレステロール値が 240 (mg/dl) を超えると治療が必要になる。若年女性の何%が治療を必要としているか。(2) コレステロール値が 200 (mg/dl) を超えると境界域に入ったと見做される。若年女性の何%が、コレステロール値が 200 (mg/dl) から 240 (mg/dl) までの境界域にあるか。

指数分布: まず公式として、$X \sim E_X(\lambda)$ のとき、

$$P(X > a) = e^{-\lambda a}, \quad P(X \leq a) = 1 - e^{\lambda a} \tag{6}$$

が大切。

定理 1. (平均と分散) $X \sim E_X(\lambda)$ ならば，X の平均と分散は次のようである．

$$E(X) = 1/\lambda,\ V(X) = 1/\lambda^2,\ D(X) = 1/\lambda. \tag{7}$$

定理 2. (指数分布の無記憶性) $X \sim E_X(\lambda)$ とする．このとき，任意の $a, b > 0$ に対して次式が成立する．

$$P(X > a + b | X > b) = P(X > a). \tag{8}$$

逆に (8) が成り立つような $(0, \infty)$ 上の連続型確率分布は指数分布である。

次の例にあるように λ は単位時間当たりの事象の生起回数であり、$1/\lambda$ が事象の生起間隔となる。

例 5.2. (来店間隔) ある会社の電話は 1 時間当たり平均 20 件（$\lambda = 20$(件/時) $= 1/3$(件/分)）である。電話の到着間隔がランダムならば、電話のかかってくる間隔 X(分) は平均 $1/\lambda = 3$(分/件) の指数分布 $E_X(1/3)$ に従う。このとき、15 分以上電話の来ない確率は

$$P(X \geq 15) = e^{-\lambda \times 15} = e^{-5} = 0.0067 \tag{9}$$

と計算できる。6 分以内に来る確率は $P(X \leq 6) = 1 - e^{-\lambda \times 6} = 1 - 0.135 = 0.865$.□

6　同時確率分布

X, Y を離散型確率変数とする。これを (X, Y) と表し、2 次元確率変数と呼ぶ。

$$(X, Y) \text{ の値域} = \left\{ (x_i, y_j) \mid i = 1, 2, \cdots, M;\ j = 1, 2, \cdots, N \right\} \tag{10}$$

とする。(X, Y) の性質は、

$$P\Big((X, Y) = (x_i, y_j)\Big) = P\Big(X = x_i, Y = y_j\Big) = f(x_i, y_j) \quad (i, j = 1, 2, \cdots) \tag{11}$$

によって定まる。これを (X, Y) の同時確率分布と言う。勿論のこと、$\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} f(x_i, y_j) = 1$ が成り立つ。

6.1　簡単な例

2 次元確率変数 (X, Y) の同時確率分布が次のように与えられているとする。

$Y \backslash X$	0	1	2	$P(Y = y)$
0	1/8	3/8	0	4/8
1	0	1/8	3/8	4/8
$P(X = x)$	1/8	4/8	3/8	1

(i) X の周辺分布 $P(X = x)$ は次の通り。

x	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$

(ii) Y の周辺分布 $P(Y=y)$ は次の通り。

y	0	1
$P(Y=y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(iii) $E(X)$ と $V(X)$ とを求める。周辺分布から計算すればよい：

$$E(X) = \sum_{x=0}^{2} x\ P(X=x) = 0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{4}{8}+2\times\frac{3}{8}=\frac{5}{4} \tag{12}$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{2} x^2\ P(X=x) = 0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{4}{8}+2^2\times\frac{3}{8}=2 \tag{13}$$

$$V(X) = E(X^2)-\{E(X)\}^2 = 2-(5/4)^2=\frac{7}{16} \tag{14}$$

(iv) $E(Y)$ と $V(Y)$ とを求める。上と同様に出来る。$E(Y)=1/2$、$V(Y)=1/4$。
(v) $E(XY)$ を求める。これは同時分布から求める。

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{1} xy\ P(X=x,\ Y=y) \\ &= (0\times 0\times(1/8)+(0\times 1\times(3/8)+(0\times 2\times 0)+(1\times 0\times 0)+(1\times 1\times(1/8))+(1\times 2\times(3/8)=7/8. \end{aligned}$$

(vi) 共分散 $\mathrm{C}(X,Y)$ を求めよう。公式: $\mathrm{C}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$ を用いる。

$$\mathrm{C}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=7/8-(5/4)\times(1/2)=1/4. \tag{15}$$

(vii) 相関係数 $\rho(X,Y)=\mathrm{C}(X,Y)/\sqrt{V(X)V(Y)}$ を求める：

$$\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{C}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}=\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{7}{16}\times\frac{1}{4}}}\approx 0.756 \tag{16}$$

以下、条件付き分布について考察する。

1. $Y=0$ が与えられた時の X の条件付分布を求める：

$$\begin{aligned} P(X=0|Y=0) &= \frac{P(X=0,Y=0)}{P(Y=0)}=\frac{1/8}{4/8}=\frac{1}{4}, \\ P(X=1|Y=0) &= \frac{P(X=1,Y=0)}{P(Y=0)}=\frac{3/8}{4/8}=\frac{3}{4}, \\ P(X=2|Y=0) &= \frac{P(X=2,Y=0)}{P(Y=0)}=\frac{0}{4/8}=0. \end{aligned} \tag{17}$$

2. $Y=0$ が与えられた時の X の条件付平均と条件付分散を求める：上記の分布を使って平均と分散を計算すればよい。

$$E(X|Y=0) = \sum_{x=0}^{1} x\ P(X=x|Y=0)=0\times(1/4)+1\times(3/4)+2\times 0=3/4, \tag{18}$$

$$\begin{aligned} V(X|Y=0) &= E(X^2|Y=1)-\{E(X|Y=1)\}^2 \\ &= \{0^2\times(1/4)+1^2\times(3/4)+2^2\times 0\}-(3/4)^2=3/16. \end{aligned} \tag{19}$$

3. $Y=1$ が与えられた時の X の条件付平均を求める：$Y=1$ が与えられた時の条件付分布は、

$$\begin{aligned} P(X=0|Y=1) &= \frac{P(X=0,Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{0}{4/8} = 0, \\ P(X=1|Y=1) &= \frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{1/8}{4/8} = 1/4. \\ P(X=2|Y=1) &= \frac{P(X=2,Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{3/8}{4/8} = 3/4 \end{aligned} \tag{20}$$

であるから、$E(X|Y=1) = 0\times 0 + 1\times(1/4) + 2\times(3/4) = 7/4..$

4. 期待値の繰り返しの公式を用いて $E(X)$ を求める。

$$E(X) \quad = \quad E(X|Y=0)\ P(Y=0) + E(X|Y=1)\ P(Y=1) = (3/4)\times(1/2) + (7/4)\times(1/2) = 5/4.$$

正規分布表

aに対して、Φ(a)を与える。但し、Φ(a)は標準正規分布の分布関数である。

すなわち、Z～N(0,1)のとき、Φ(a) = P(Z≦a).　　153頁(4.5.11)式を参照のこと。

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.532	0.536
0.1	0.540	0.544	0.548	0.552	0.556	0.560	0.564	0.567	0.571	0.575
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.610	0.614
0.3	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652
0.4	0.655	0.659	0.663	0.666	0.670	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688
0.5	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722
0.6	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785
0.8	0.788	0.791	0.794	0.797	0.800	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813
0.9	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839
1.0	0.841	0.844	0.846	0.848	0.851	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.9990324	0.9990646	0.9990957	0.9991260	0.9991553	0.9991836	0.9992112	0.9992378	0.9992636	0.9992886
3.2	0.9993129	0.9993363	0.9993590	0.9993810	0.9994024	0.9994230	0.9994429	0.9994623	0.9994810	0.9994991
3.3	0.9995166	0.9995335	0.9995499	0.9995658	0.9995811	0.9995959	0.9996103	0.9996242	0.9996376	0.9996505
3.4	0.9996631	0.9996752	0.9996869	0.9996982	0.9997091	0.9997197	0.9997299	0.9997398	0.9997493	0.9997585
3.5	0.9997674	0.9997759	0.9997842	0.9997922	0.9997999	0.9998074	0.9998146	0.9998215	0.9998282	0.9998347
3.6	0.9998409	0.9998469	0.9998527	0.9998583	0.9998637	0.9998689	0.9998739	0.9998787	0.9998834	0.9998879
3.7	0.9998922	0.9998964	0.9999004	0.9999043	0.9999080	0.9999116	0.9999150	0.9999184	0.9999216	0.9999247
3.8	0.9999277	0.9999305	0.9999333	0.9999359	0.9999385	0.9999409	0.9999433	0.9999456	0.9999478	0.9999499
3.9	0.9999519	0.9999539	0.9999557	0.9999575	0.9999593	0.9999609	0.9999625	0.9999641	0.9999655	0.9999670
4.0	0.9999683	0.9999696	0.9999709	0.9999721	0.9999733	0.9999744	0.9999755	0.9999765	0.9999775	0.9999784