基礎統計

第11回講義資料

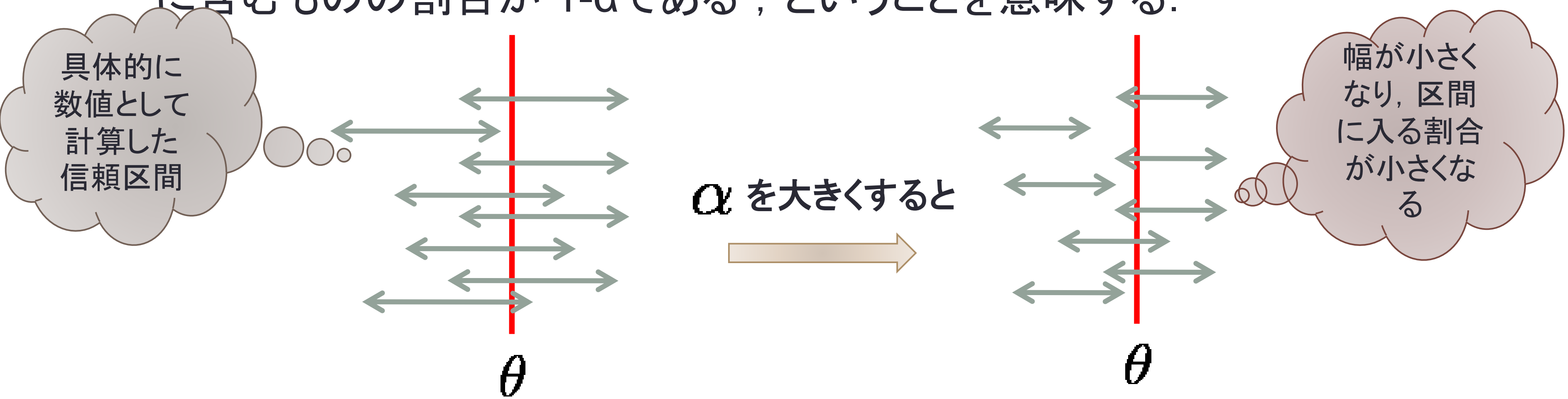
本日の講義内容

- 第7章：推定
- 第8章：統計的仮説検定

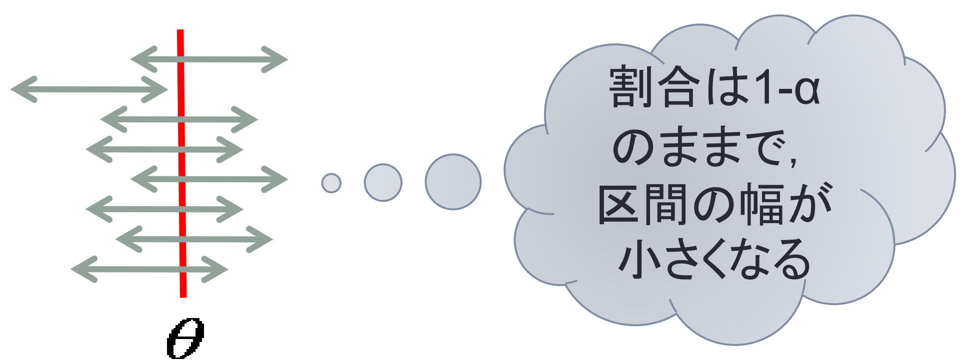
第7章：推定

信頼区間とは

- “繰り返し標本抽出を行い，それぞれ信頼区間を求めた場合，θを区間内に含むものの割合が 1-αである”，ということを意味する.



- 信頼区間の幅は標本の大きさnが大きくなるに従って小さくなる.



正規母集団の母平均，母分散の区間推定（1）

- 母平均の信頼区間

$P(L \leq \mu \leq U) = 1-\alpha$なる [redacted] を求めたい．

- 分散が既知の場合　$\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$　標準化 ⇨　$Z = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

図11.6参照

$$P(-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

$Z_{\alpha/2}$ は標準正規分布 $N(0,1)$ の上側100α/2パーセント点

$$P(\overline{X} - Z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \overline{X} + Z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n}) = 1-\alpha$$

母平均μの信頼係数1-αの信頼区間

$$[\overline{X} - Z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n},\ \overline{X} + Z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n}]$$

正規母集団の母平均，母分散の区間推定（2）

- 母平均の信頼区間
  - 分散が未知の場合

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$P(-t_{\alpha/2}(n-1) \leq t \leq t_{\alpha/2}(n-1)) = 1 - \alpha$$

$t_{\alpha/2}(n-1)$ は自由度n-1のt分布$t(n-1)$の上側100α/2パーセント点

$$P(\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1) \cdot s/\sqrt{n} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1) \cdot s/\sqrt{n}) = 1 - \alpha$$

母平均μの信頼係数1-αの信頼区間

$$[\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1) \cdot s/\sqrt{n},\ \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1) \cdot s/\sqrt{n}]$$

正規母集団の母平均，母分散の区間推定(3)

- 母分散の信頼区間　$\chi^2 = (n-1)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$

$$P(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \le \chi^2 \le \chi^2_{\alpha/2}(n-1)) = 1-\alpha$$

$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$, $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ は自由度n-1のカイ二乗分布 $\chi^2(n-1)$ の上側100(1-α/2), 100α/2パーセント点

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right) = 1-\alpha$$

母分散 σ^2 の信頼係数1-αの信頼区間

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \quad \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right]$$

第8章：統計的仮説検定

統計的仮説検定

- 仮説検定
  - 事例(問題設定)
    - 白熱電球の寿命の平均が1700時間であるという。
    - 新型の電球が開発され光度が改良されたが、寿命が変化したか否かについては不明であるとする。
    - 電球の寿命は新型も従来のものも正規分布をなし、その標準偏差はσ=180(時間)であることがわかっている。
  - 仮説検定:新型電球の寿命の平均をμ時間とおくと、

帰無仮説 $H_0 : \mu = 1700$ (新型電球の寿命に変化はない)

対立仮説 $H_1 : \mu \neq 1700$ (新型電球の寿命に変化がある)

いずれが正しいか？　仮説検定する。

帰無仮説と対立仮説

- 帰無仮説 H_0 考察の基準となる仮説
- 対立仮説 H_1 H_0 が棄却されたときに採択される仮説
- 両者を合わせて仮説検定あるいは検定という

- 結論としては、2つの一方を選択する
  - H_0 を棄却する（reject H_0 ）
  - H_0 を採択する（受容する）（accept H_0 ）

- 標本の値に基づいてこの選択を行うことを統計的仮説検定という。単に検定という。検定の手順や方法を検定方式と呼ぶ。

検定方式

- 平均値の検定
  - 標本から得られた平均値1835時間と、1700時間との差に意味があるかどうか。
  - 差に意味があることを、差が有意であるという
  - 意味のある差のことを有意差という
  - どれほど差があれば有意差とみなせるか？

$$\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$T = \frac{\overline{X} - 1700}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$$

$$\begin{cases} |T| > c & \Rightarrow H_0 \text{ を棄却する} \\ |T| \leq c & \Rightarrow H_0 \text{ を採択する} \end{cases}$$

検定統計量

臨界値

第1種の誤り、第2種の誤り、有意水準

- 統計的仮説検定では、誤りを犯す確率ができるだけ小さくなるようにcを選択する
- 2種類の誤り
  - 第1種の誤り：帰無仮説 H_0 が正しいときに、帰無仮説 H_0 を棄却する誤り
  - 第2種の誤り：対立仮説 H_1 が正しいときに(H_0 が誤っているときに)、帰無仮説 H_0 を採択する誤り。
- 統計的仮説検定では第1種の誤りを重視する
  - 有意水準：第1種の誤りの確率として許容できる値αを事前に定める

第1種の誤りの確率＝P({ H_0 を棄却する})
＝P(|T|>c)

例：α=0.05　のとき　c=1.96

母平均の検定

- $X_1, X_2, \cdots, X_n$は正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさnの無作為標本とする。このとき、

$$T = (\overline{X} - \mu_0)/\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$ とおけば、

$$\begin{cases} |T| > z_{\alpha/2} & \Rightarrow H_0 \text{ を棄却する} \\ |T| \leq z_{\alpha/2} & \Rightarrow H_0 \text{ を採択する} \end{cases}$$

は検定問題に対する有意水準αの検定である。

片側検定と両側検定

- 改良によって寿命が長くなることはあっても短くなることはないことが事前にわかっているときは？
- 対立仮説 H_1 を $H_1 : \mu > \mu_0$ とすればよい。

- 片側仮説 $\begin{cases} T > c & \Rightarrow H_0 \text{ を棄却する} \\ T \leq c & \Rightarrow H_0 \text{ を採択する} \end{cases}$

$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu > \mu_0$ 右片側検定

$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu < \mu_0$ 左片側検定

片側検定（右片側検定）

- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の無作為標本とする。このとき、

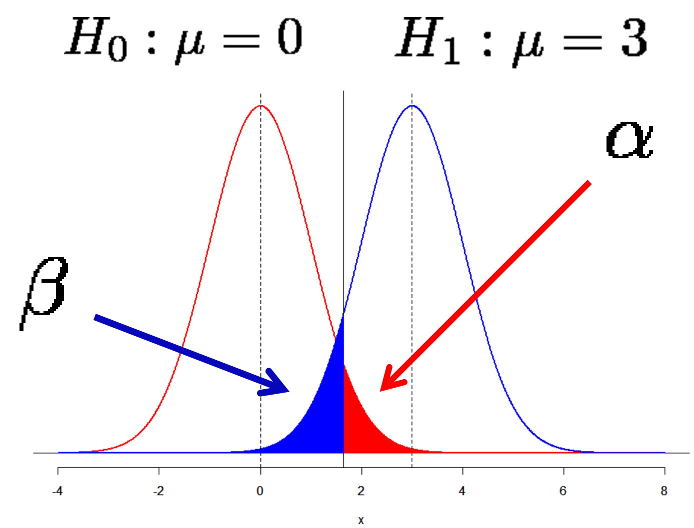
$$T = (\overline{X} - \mu_0) / \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$ とおけば、

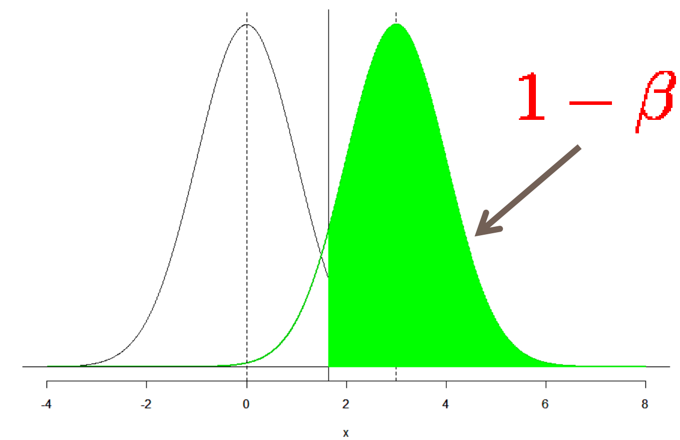
$$\begin{cases} T > z_\alpha & \Rightarrow H_0 \text{ を棄却する} \\ T \leq z_\alpha & \Rightarrow H_0 \text{ を採択する} \end{cases}$$

は、検定問題 $H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu > \mu_0$ に対する有意水準αの検定である.

検出力

- 第一種の誤り(α)
  - 帰無仮説が真であるにもかかわらず，統計量の値が棄却域に入ってしまったために，帰無仮説を棄却してしまう誤り．
- 第二種の誤り(β)
  - 帰無仮説が偽であるにもかかわらず，統計量の値が棄却域に入らなかったために，帰無仮説を棄却しない誤り．
- 検出力($1-\beta$)
  - 帰無仮説が真でないとき，その通りに，これを棄却する確率





⇒ 検定方法の良さの評価基準

検出力が大きいことが望ましい

8.2 母平均の検定

- 8.2.1 両側t検定
  - $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の無作為標本とする.
  - 母分散は**未知**とする.
  - 検定問題 $H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$
  - 検定統計量

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{s^2/n}}$$

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \sim t(n-1)$$

自由度 n-1 のt分布に従う

母平均のt検定

- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の無作為標本とする．このとき，

$$\begin{cases} |t| > t_{\alpha/2}(n-1) & \Rightarrow & H_0 \text{ を棄却する} \\ |t| \leq t_{\alpha/2}(n-1) & \Rightarrow & H_0 \text{ を採択する} \end{cases}$$

は検定問題 $H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$ に対する有意水準αの検定である．ここに

$t_{\alpha/2}(n-1)$ は $t(n-1)$ の上側100α/2%点である。

事例:電球の寿命

- 母分散が未知の場合
  - 検定問題 $H_0 : \mu = 1700 \quad H_1 : \mu \neq 1700$
  - 有意水準 $\alpha = 0.05$
  - 標本から得られる情報 $\overline{X} = 1835, \quad s = 200$

$$t = \frac{1835 - 1700}{\sqrt{(200)^2/16}} = 2.7$$

  - 棄却域 $R = \{|t| > t_{0.025}(15) = 2.131\}$

$$t_{0.025}(15) = 2.131$$

  - 結論:帰無仮説H_0は棄却される.

母平均の検定①（両側検定・母分散既知）

- 帰無仮説と対立仮説

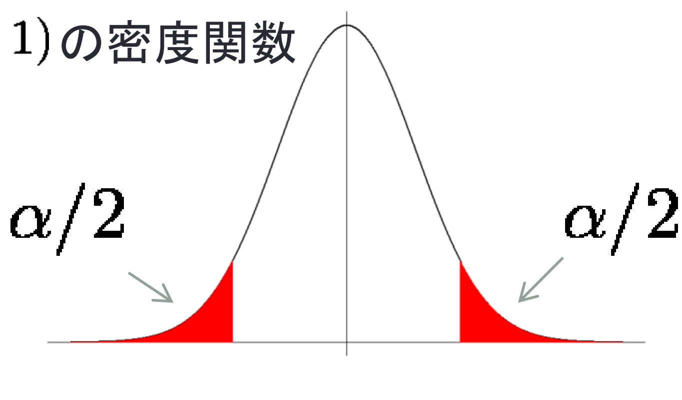
$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

- 検定統計量

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- 有意水準　α
- 棄却域　$R = \{Z \mid |Z| > Z_{\alpha/2}\}$

$N(0,1)$の密度関数



- 例：牛乳の乳脂肪分

　乳脂肪分が3%の牛乳を製造販売する会社があったとする．会社の主張は正しいといえるか．有意水準5%で検定せよ．

$$H_0 : \mu = 3, \quad H_1 : \mu \neq 3$$

標本数	$n = 20$
標本平均	$\overline{X} = 2.92$
分散（既知）	$\sigma^2 = 0.18^2$

検定統計量

$$Z = \frac{2.92 - 3}{0.18/\sqrt{20}} = -1.988$$

有意水準　$\alpha = 0.05$

棄却域　$R = \{Z \mid |Z| > Z_{0.05/2} = 1.96\}$

帰無仮説は棄却される．主張は正しくない．

母平均の検定②（両側検定・母分散未知）

- 帰無仮説と対立仮説

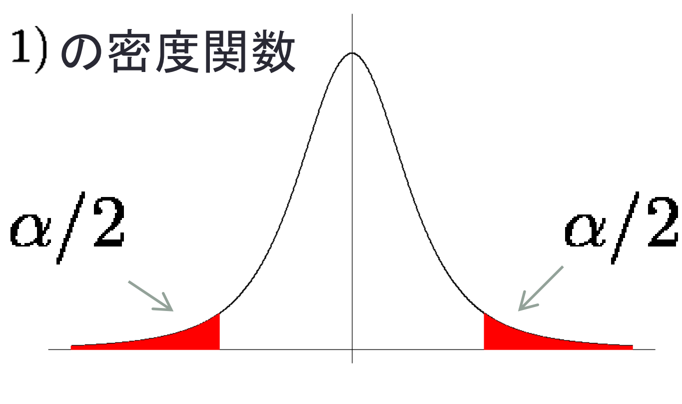
$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

- 検定統計量

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

- 有意水準　α
- 棄却域　$R = \{t \mid |t| > t_{\alpha/2}(n-1)\}$

$t(n-1)$ の密度関数



- 例：牛乳の乳脂肪分
  先ほどと同じ問題.
  分散が未知

$$H_0 : \mu = 3, \quad H_1 : \mu \neq 3$$

標本数　$n = 20$

標本平均　$\overline{X} = 2.92$

標本分散　$s^2 = 0.18^2$

検定統計量　$t = \frac{2.92 - 3}{0.18/\sqrt{20}} = -1.988$

有意水準　$\alpha = 0.05$

棄却域

$$R = \{t \mid |t| > t_{0.05/2}(19) = 2.093\}$$

帰無仮説は有意水準5%で棄却できない.
主張が正しくないとはいえない.

8.2.2 片側t検定

- 片側検定問題
  - 右片側検定

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

  - 左片側検定

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu < \mu_0$$

母平均の片側t検定

- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の無作為標本とする．このとき，

$$\begin{cases} t > t_{\alpha/2}(n-1) & \Rightarrow \quad H_0 \text{ を棄却する} \\ t \leq t_{\alpha/2}(n-1) & \Rightarrow \quad H_0 \text{ を採択する} \end{cases}$$

は検定問題 $H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu > \mu_0$ に対する有意水準αの検定である．ここに

$t_{\alpha/2}(n-1)$ は $t(n-1)$ の上側100α/2%点である。

母平均の検定③（片側検定・母分散既知）

- 帰無仮説と対立仮説

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

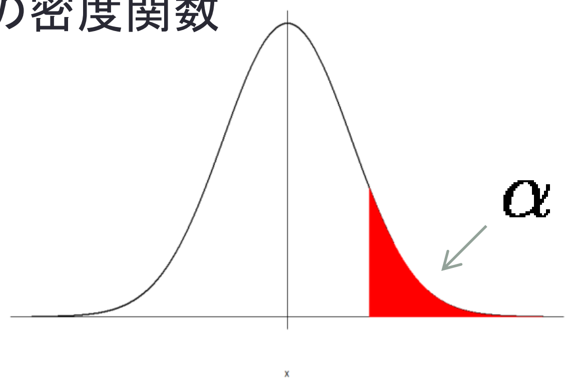
（右片側検定）

- 検定統計量

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- 有意水準 α
- 棄却域 $R = \{Z \mid Z > Z_\alpha\}$

$N(0,1)$の密度関数



- 例：改良の確認の検定
  分散既知とみなす

$$H_0 : \mu = 0, \quad H_1 : \mu > 0$$

標本数 $n = 10$
標本平均 $\overline{X} = 2.5$
分散（既知） $\sigma^2 = 2.8^2$

検定統計量 $Z = \dfrac{2.5}{2.8/\sqrt{10}} = 2.823$

有意水準 $\alpha = 0.05$

棄却域 $R = \{Z \mid Z > Z_{0.05} = 1.645\}$

有意水準5%で帰無仮説は棄却される.
この講義に効果があったと認められる.

母平均の検定④（片側検定・母分散未知）

- 帰無仮説と対立仮説

$$H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu > \mu_0$$

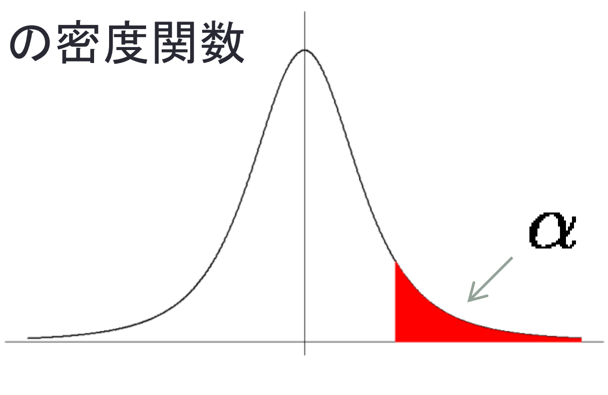
（右片側検定）

- 検定統計量

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

- 有意水準　α
- 棄却域　$R = \{t \mid t > t_\alpha(n-1)\}$

$t(n-1)$ の密度関数



- 例：改良の確認の検定

$$H_0: \mu = 0, \quad H_1: \mu > 0$$

標本数	$n = 10$
標本平均	$\overline{X} = 2.5$
標本分散	$s^2 = 2.8$

検定統計量　$t = \dfrac{2.5}{2.8/\sqrt{10}} = 2.823$

有意水準　$\alpha = 0.05$

棄却域

$$R = \{t \mid t > t_{0.05}(9) = 1.833\}$$

有意水準5%で帰無仮説は棄却される.
この講義に効果があったと認められる.

8.3 母分散の検定

- 母分散の片側検定
  - $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の無作為標本とする.
  - 検定問題　$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$
  - 検定統計量

$$Y = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

自由度n-1のカイ2乗分布に従う

母分散の検定

- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ から の大きさ n の無作為標本とする. このとき,

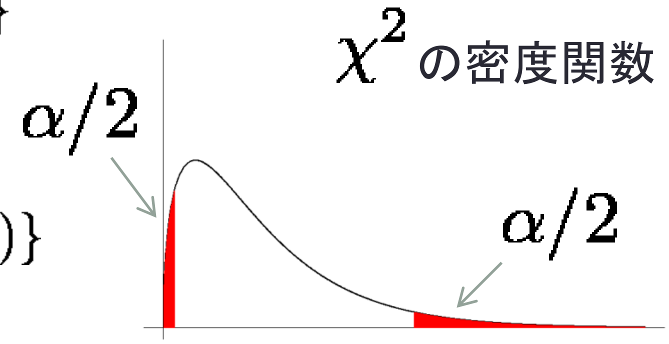
$$\begin{cases} Y > \chi^2_\alpha(n-1) & \Rightarrow \quad H_0 \text{ を棄却する} \\ Y \leq \chi^2_\alpha(n-1) & \Rightarrow \quad H_0 \text{ を採択する} \end{cases}$$

は、検定問題 $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ に対する有意水準αの検定である.
ここに $\chi^2_\alpha(n-1)$ は自由度n-1のカイ2乗分布の上側100α%点である.

おさらい

母分散に対する仮説検定

- 両側検定
  - 対立仮説 $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
  - 棄却域 $R = \{\chi^2 \mid \chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1),\ \chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\}$
- 片側検定
  - 右片側検定
    - 対立仮説 $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$
    - 棄却域 $R = \{\chi^2 \mid \chi^2 > \chi^2_{\alpha}(n-1)\}$
  - 左片側検定
    - 対立仮説 $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$
    - 棄却域 $R = \{\chi^2 \mid \chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\}$



検定統計量

$$\chi^2 = (n-1)s^2/\sigma_0^2$$

母平均の差の検定

- 二つのグループで結果に差があるかどうか

$$X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \qquad Y_j \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

$$X_1, X_2, \cdots, X_m \qquad Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$$

$$\overline{X} - \overline{Y} = ?$$

- 帰無仮説と対立仮説

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	両側
$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	右片側
$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	左片側

- 分散が等しい場合 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$
- 分散が等しくない場合 $\Longrightarrow$ ウェルチの検定

母分散の比の検定

- 母分散が等しい（母分散の比＝1）かどうかの検定
  - 母平均の差の検定では，母分散の比の検定の結果によって方式を選ぶことになる．
- 手順
  - 帰無仮説と対立仮説

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

状況によっては片側検定もありうる

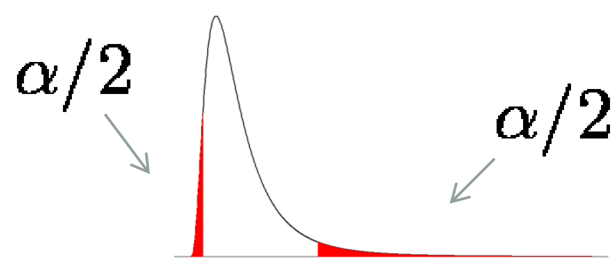
  - 検定統計量

$$F = s_1^2 / s_2^2$$

  - 有意水準 α
  - 棄却域

$$R = \{F \mid F < F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1), F > F_{\alpha/2}(m-1, n-1)\}$$

F分布の密度関数



χ^2 検定

- 観測度数をもとにして行われる検定
- 検定統計量はカイ二乗分布に従う
  - 適合度検定
    - 仮定された理論上の確率分布に対して，標本から求められた度数が適合するか否かを検証する方法

$$H_0 : P(A_1) = p_1, \cdots, P(A_k) = p_k$$

  - 独立性の検定
    - 2つの異なる属性を同時に測定し，集計結果を分割表にしたとき，2つの属性が独立かどうかを検証する方法

$$H_0 : P(A_i \cap B_j) = P(A_i)P(B_j) \text{ for all } i, j$$

適合度検定

- 観測度数と理論度数の差が小さい⇒ 適合している

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - np_i)^2}{np_i}$$

カテゴリー	A_1	A_2	$\cdots$	A_k	計
観測度数	f_1	f_2	$\cdots$	f_k	n
理論確率	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	1
理論度数	np_1	np_2	$\cdots$	np_k	n

サイコロ投げ50回

数字	1	2	3	4	5	6	計
回数	10	7	8	11	6	8	50

サイコロは正しく作られているか？

独立性の検定

- 観測度数と，独立の場合の理論度数の差が小さい⇒独立である

$$f_{ij} - n(f_{i\cdot}/n)(f_{\cdot j}/n)$$

$$\chi^2 = \sum_i \sum_j \frac{(f_{ij} - f_{i\cdot} f_{\cdot j}/n)^2}{f_{i\cdot} f_{\cdot j}/n}$$

	B_1	B_2	$\cdots$	B_k	計
A_1	f_{11}	f_{12}	$\cdots$	f_{1c}	$f_{1\cdot}$
A_2	f_{21}	f_{12}	$\cdots$	f_{2c}	$f_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_r	f_{r1}	f_{r2}	$\cdots$	f_{rc}	$f_{r\cdot}$
計	$f_{\cdot 1}$	$f_{\cdot 2}$	$\cdots$	$f_{\cdot c}$	n

比率の検定

- 中心極限定理を用いる検定
  - 検定統計量が近似的に正規分布に従う場合は，正規分布に対する検定の手続きを用いられる.

  - 例：　母比率の検定
    成功率 p

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{失敗} \\ 1, & \text{成功} \end{cases} \sim Bi(1,p)$$

標本比率 $\hat{p} = S_n/n$

成功回数 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim Bi(n,p)$

試行回数 n

検定統計量 $Z = \dfrac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$　　n が大きいとき標準正規分布に従う

次回の講義内容(7/3)

- 第9章：仮説検定（続き）
- 第10章：回帰分析