積分の計算法について

1　積分の定義

いま, $\mathbb{R}$ 上の関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が, 勝手にひとつ与えられているとします. このとき, $a, b \in \mathbb{R}$ を $a < b$ となる実数として, 関数 $f(x)$ の区間 $[a, b]$ 上での積分の値

$$\int_a^b f(x)dx$$

とは, 皆さん良くご存知のとおり, **区間 $[a, b]$ 上で関数 $f(x)$ のグラフと x 軸に囲まれた領域の (符号付きの) 面積**のことです (図 1 を参照).

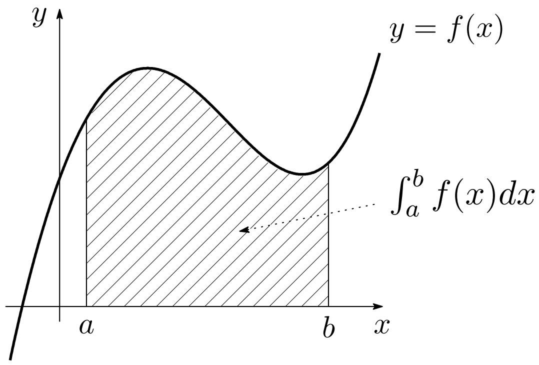

図 1: 積分の値 $\int_a^b f(x)dx$ とは, 区間 $[a, b]$ 上で関数 $f(x)$ のグラフと x 軸に囲まれた領域の (符号付きの) 面積のことである.

ただし, **一般に,「曲がった図形」を考えたときには,「その面積の値がいくつになるのか」ということや,「そもそも面積が定まるのか」ということは, それほど明らかなことではなくなってしまいます**.

そこで, 積分の値 $\int_a^b f(x)dx$ を考えるにあたっても, **「長方形であれば, その面積についてハッキリしたことが言える」**ということに注目して, 以下で見るように,「短冊の面積の極限値」として積分の値 $\int_a^b f(x)dx$ を定義するのが普通です.

1.1　Riemann 和

そこで, まず, 区間 $[a, b]$ 上で関数 $f(x)$ のグラフと x 軸に囲まれた領域である「曲がった図形」を短冊で近似することを考えます. そのために,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \tag{1}$$

となるような実数 $x_i \in [a,b]$, $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ を, 勝手にひとつずつ選んで, 区間 $[a,b]$ を,

$$[a,b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n]$$

というように細かい区間に分割してみることにします (図 2 を参照).

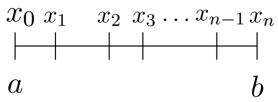

図 2: 閉区間 $[a,b]$ を細かい区間に分割する.

ただし, このような分割をいちいち書いていると大変ですので, (1) 式を満たすような実数 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ を与えることを**区間 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ の分割**と呼び, 分割点の集合を考えることで, このような分割を,

$$\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

と表わすことにします.[1] さらに, 短冊に現われるそれぞれの長方形の高さを定めるために, 各小区間の代表点 $\gamma_i \in [x_{i-1}, x_i]$ を勝手にひとつずつ選んできて, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$ と表わすことにします.

以上の準備のもとで, 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ を底辺とし, $f(\gamma_i)$ を高さとする長方形からなる短冊を考えると, その面積は,

Riemann 和の定義

$$S(\Delta;\gamma) = \sum_{i=1}^{n} f(\gamma_i)(x_i - x_{i-1})$$

となりますが, $S(\Delta;\gamma)$ のことを分割 Δ と代表点 γ に対する関数 $f(x)$ の **Riemann 和**と呼びます (図 3 を参照). ここで, 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の長さを,

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

と表わすことにすると, Riemann 和 $S(\Delta;\gamma)$ も,

Riemann 和の定義 (書き直し)

$$S(\Delta;\gamma) = \sum_{i=1}^{n} f(\gamma_i)\Delta x_i \tag{2}$$

と表わすことができますから, (一般には異なる大きさの) 長方形からなる短冊の面積を考えているということがよりハッキリと表現することができます.

[1] このとき, それぞれの分割 Δ によって, 分割点の数 $n+1$ は異なっても良いと考えることにします.

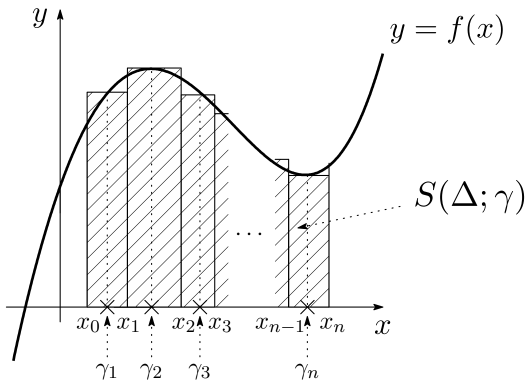

図 3: 各小区間から代表点 $\gamma_i \in [x_{i-1}, x_i]$ を, 勝手にひとつずつ選んできたときの Riemann 和 $S(\Delta;\gamma)$ は, 上のような短冊の面積として与えられる.

1.2 積分の定義

さて, 1.1 節では, 積分区間 $[a,b]$ の分割 Δ と各小区間の代表点 γ を与えることにより, 底辺が Δx_i で高さが $f(\gamma_i)$ の長方形からなる短冊を考え, この短冊の面積として, Riemann 和 $S(\Delta;\gamma)$ を定義しました. ここで, 区間 $[a,b]$ 上で関数 $f(x)$ のグラフと x 軸に囲まれた「曲がった領域」は, 一般には, 短冊からなる「真っ直ぐな領域」とは一致しませんから, その面積も一致するとは限りません. しかしながら, 短冊を構成するそれぞれの長方形の底辺の幅をどんどん細かくしていくと,[2] これら二つの領域の間の差は小さくなり, 二つの領域の面積の間の差も無視できるようになると思われます. そこで, **分割を細かくしていったときの短冊の面積の極限値として,「曲がった領域」の面積 $\int_a^b f(x)dx$ を定義する**ということが, **Riemann 積分**のアイデアです.

このことを, もう少し数学的な言い方で表現すると, 次のようになります. いま, 分割 Δ の分割の細かさを計る目安として, 各小区間の幅の最大値を,

$$\begin{aligned}|\Delta| &= \max_{1\leq i\leq n} |x_i - x_{i-1}| \\ &= \max_{1\leq i\leq n} \Delta x_i\end{aligned}$$

と表わし, これを**分割 Δ の幅**と呼ぶことにします. このとき, 例えば, $f(x)$ が連続関数であるとすると, 分割の幅 $|\Delta|$ をどんどん小さくすると, 積分区間 $[a,b]$ の分割の仕方や各小区間の代表点の取り方に依らずに, Riemann 和 $S(\Delta;\gamma)$ の値は, どれもこれも同じような数になることを, 実際に確かめることができます. すなわち,

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S(\Delta;\gamma) \tag{3}$$

という極限が存在することを, 実際に確かめることができます. このとき, この極限値とは何だろうかと考えてみると, 直感的には, 区間 $[a,b]$ 上で関数 $f(x)$ のグラフと x 軸に囲まれた「曲がった領域」の面積であると考えられるわけです.

[2]当然ながら, そのためには, 分割 Δ を構成する分割点の数 $n+1$ もどんどん増やしていく必要があります.

そこで, 数学では, このことを逆手に取って, 逆に, (3) 式で与えられる極限値として積分の値を定義します．すなわち, (3) 式の極限が存在するときに, **関数 $f(x)$ は区間 $[a,b]$ 上で積分可能である**と言い, その値を,

積分の定義

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta|\to 0} S(\Delta;\gamma) \tag{4}$$

と定義します．いま, (2) 式という Riemann 和の定義式を用いて, (4) 式を,

積分の定義 (書き直し)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\gamma_i)\Delta x_i \tag{5}$$

というように表わしてみると, $\int_a^b f(x)dx$ という積分の記号の意味がよりハッキリするかもしれません.[3]

さて, (2) 式で与えられる Riemann 和は, 関数 $f(x)$ が連続関数でなくとも, 勝手な関数 $f(x)$ に対して意味がありますが, このように勝手な関数を考えてしまうと, 一般には,

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S(\Delta;\gamma) \tag{6}$$

という極限が存在するとは限りませんし, (6) 式の極限が存在する場合でも, そのことをきちんと確かめることは甚だ困難なことになってしまいます．一方, 上でも少し触れましたが, **例えば, $f(x)$ が連続関数である場合など, 直感的に, 区間 $[a,b]$ 上で関数 $f(x)$ のグラフと x 軸に囲まれた「曲がった領域」の面積が確定すると思われる場合**には, (6) 式の極限が存在することを実際に確かめることができます．ただし, そのためには少し準備が必要ですから, ここではその確認作業は省略することにします.[4]

皆さんにとって大切なことは, このような場合には, 短冊の面積である Riemann 和 $S(\Delta;\gamma)$ の値が, 分割を細かくすることにより, 関数 $f(x)$ のグラフと x 軸に囲まれた「曲がった領域」の面積に近づきそうだということを直感的に納得して, (5) 式という積分の定義式の意味をきちんと理解することではないかと思います．そして, 取り合えず, (6) 式の極限が存在することは直感的に認めてしまい, まずは, 次節以下で述べるような「積分の計算法」を納得した上で, 実際に具体的な積分計算をたくさん行なってみることにより, 積分に対する感覚を養うことではないかと思います.

[3] ここで,「$\int$」は, 和 (sum) の記号「$\sum$」が, びょーんと伸びた状態を表わしています．また, 英語の「S」にあたるギリシア文字が「Σ」です.

[4] 数学 IB 演習の第 10 回の解説では, 関数 $f(x)$ が何度でも微分できる関数である場合の確認作業を行っています．興味がある方は, そちらの解説を参照してみて下さい.

2　積分の計算法

2.1　原始関数

さて, 1 節では, 関数 $f(x)$ の積分 $\int_a^b f(x)dx$ が,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta|\to 0} S(\Delta;\gamma) \tag{7}$$

というように, 分割を細かくしていったときの Riemann 和 $S(\Delta;\gamma)$ の極限として定義できることを見ました. しかしながら, 与えられた関数 $f(x)$ に対して, (7) 式の定義式にもとづいて積分の値を求めることは, 一般に甚だ困難です. そこで, 具体的に積分の値を求めるためには「別な工夫」が必要になりますが, このときのアイデアは**「積分区間を動かしたときに, 積分の値がどのように変化するのか」ということに注目する**ということです. すなわち, 例えば, 積分区間 $[a,b]$ のうち, **a は固定して, b だけを動かす**ことを考えて,

$$\boldsymbol{F(b) = \int_a^b f(x)dx}$$

として, $F(b)$ が b に関してどのような関数になるのかを考えてみるということです. そこで, 以下では, 変数らしく, $b \rightsquigarrow x$ と書き直して,

関数 $F(x)$ の定義

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{8}$$

という関数が, 変数 x に関してどのような関数になるのかということを考えてみることにします.[5]

いま, $x_0 \in \mathbb{R}$ を, 勝手にひとつ取ってきて, $h \in \mathbb{R}$ として,

$$F(x_0+h) - F(x_0)$$

という差を考えてみます. すると, $F(x_0+h)$ と $F(x_0)$ は, それぞれ, 図 4 のような面積を表わすことが分かりますから, $F(x_0+h) - F(x_0)$ は,

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx$$

というように表わせることが分かります (図 5 を参照). ただし, $h < 0$ のときには,

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = -\int_{x_0+h}^{x_0} f(x)dx$$

と定めることにします.[6]

[5] ここで, 積分の上端である x とゴチャゴチャになって, 後で余計な混乱を生じてもいけませんから, 積分変数の方も $x \rightsquigarrow t$ と書き直すことにしました.

[6] 全く同様に, 一般に, $a > b$ のときは, 区間 $[a,b]$ というのは意味がありませんが, 区間 $[b,a]$ というのは意味があることに注意して,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

と定めます. ここで, 積分の上端と下端を入れ替えたときにマイナス符号を付けるのは, 実は, 積分区間 $[a,b]$ の**「向き」**ということに関係しています.

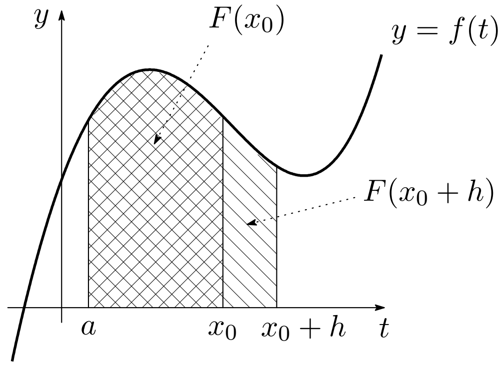

図 4: $F(x_0 + h)$ と $F(x_0)$ は, それぞれ, 上のような面積を表わす.

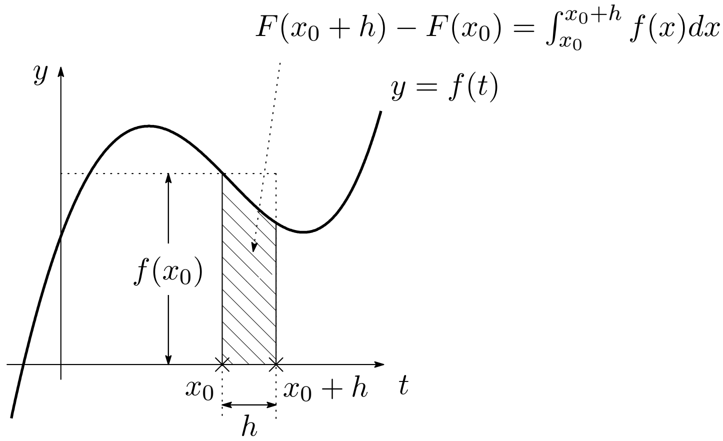

図 5: $F(x_0 + h) - F(x_0)$ は, 上のような面積を表わす.

そこで, いま, **被積分関数 $f(t)$ が $\mathbb{R}$ 上の連続関数である**と仮定してみます. すると, 特に, 関数 $f(t)$ は $t = x_0$ においても連続ですから, $t \fallingdotseq x_0$ のとき,

$$f(t) \fallingdotseq f(x_0)$$

となることが分かります. いま, $|h|$ の大きさが十分小さければ, 区間 $[x_0, x_0 + h]$ 上の勝手な点 $t \in [x_0, x_0 + h]$ に対して, (あるいは, $h < 0$ のときには, 区間 $[x_0 + h, x_0]$ 上の勝手な点 $t \in [x_0 + h, x_0]$ に対して,)

$$t \fallingdotseq x_0$$

である考えることができますから, 積分区間上の勝手な点 $t \in [x_0, x_0 + h]$ に対して, (あるいは, $h < 0$ のときには, 勝手な点 $t \in [x_0 + h, x_0]$ に対して,)

$$f(t) \fallingdotseq f(x_0) \tag{9}$$

であると考えることができます. したがって, (9) 式の両辺を積分することで,

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \fallingdotseq \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt \tag{10}$$

と近似できることが分かりますから, $|h|$ の大きさが十分小さいときには,

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

$$
\begin{aligned}
&\fallingdotseq \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt && \text{((10) 式より)} \\
&= f(x_0) \cdot \int_{x_0}^{x_0+h} dt \\
&= f(x_0) \cdot h && (11)
\end{aligned}
$$

というように近似できることが分かります.[7] よって, (11) 式の両辺を h で割ってから, $h \to 0$ としてみると,

$$
\begin{aligned}
\frac{dF}{dx}(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \\
&= f(x_0) \qquad (12)
\end{aligned}
$$

となることが分かります.[8] これが, 勝手な実数 $x_0 \in \mathbb{R}$ に対して成り立つわけですから, 変数らしく, $x_0 \rightsquigarrow x$ と書き直すことにすると,

関数 $F(x)$ と被積分関数 $f(x)$ の間の関係

$$
\frac{dF}{dx}(x) = f(x) \qquad (13)
$$

となることが分かりました. すなわち, $F(x)$ は「微分すると $f(x)$ となる」ような関数であることが分かりました.

一般に, 与えられた関数 $f(x)$ に対して,

関数 $f(x)$ の原始関数の定義

$$
\frac{dG}{dx}(x) = f(x) \qquad (14)
$$

となるような関数 $G(x)$ を関数 $f(x)$ の**原始関数**と呼びます. すると, (13) 式から,

$$
F(x) = \int_a^x f(t)dt
$$

は, 関数 $f(x)$ の原始関数 (のうちのひとつ) であることが分かります. そこで, いま, (14) 式を満たすような関数 $f(x)$ の原始関数 $G(x)$ が何でも良いからひとつ見つかったとします. このとき, 一般には,

$$
F(x) = G(x)
$$

となるとは限りませんが, 次のようにして, $F(x)$ を求めることができます.

いま, $F(x) - G(x)$ という関数を微分してみると, (13) 式, (14) 式から,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(F(x) - G(x)\right) &= \frac{dF}{dx}(x) - \frac{dG}{dx}(x) \\
&= f(x) - f(x) && \text{((13) 式, (14) 式より)}
\end{aligned}
$$

[7] すなわち, $|h|$ の大きさが十分小さいときには, $F(x_0+h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ という面積は, 底辺が h で高さが $f(x_0)$ の長方形の面積にほぼ等しいだろうということです (図 5 も参照).

[8] もう少し厳密な議論については, 数学 IB 演習の第 10 回の解説を参照して下さい.

$$= 0$$

となることが分かります．よって，$C \in \mathbb{R}$ を定数として，

$$F(x) - G(x) = C \tag{15}$$

となることが分かります．そこで，

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

となることに注意して，(15) 式の両辺で，$x = a$ としてみると，

$$\begin{aligned} C &= F(a) - G(a) \\ &= -G(a) \end{aligned} \tag{16}$$

となることが分かります．よって，(15) 式，(16) 式から，

$$\begin{aligned} F(x) &= G(x) + C && (\text{(15) 式より}) \\ &= G(x) - G(a) && (\text{(16) 式より}) \end{aligned}$$

というように表わせることが分かります．すなわち，

$$\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a) \tag{17}$$

と表わせることが分かります．

ここで，改めて，積分の上端を $x \rightsquigarrow b$ と書き直し，積分変数を $t \rightsquigarrow x$ と書き直すことにすると，以上の議論から，

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) \tag{18}$$

と表わせることが分かりました．すなわち，**関数 $f(x)$ の原始関数 $G(x)$ を何でもよいからひとつ見つけることができれば，後は，積分区間の端っこでの $G(x)$ の値を引き算することで，関数 $f(x)$ の積分の値 $\int_a^b f(x)dx$ が計算できる**ことが分かりました．[9] ここで，(18) 式の右辺を，

$$G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$$

と表わすことにして，

原始関数を用いた積分の計算法

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= [G(x)]_a^b \\ &= G(b) - G(a) \end{aligned}$$

というように，(18) 式を分解して表わすと，**「関数 $f(x)$ の原始関数 $G(x)$ を何でもよい**

[9] 上で行った議論と全く同様にして，**与えられた関数 $f(x)$ の原始関数は，定数を足し算する不定性を除いて一意的に定まる**ことが分かります．興味がある方は，上で行った議論を参考にして確かめてみて下さい．

からひとつ見つけることができれば」という最初のポイントと,**「後は, 積分区間の端っこでの $G(x)$ の値を引き算することで, 関数 $f(x)$ の積分の値 $\int_a^b f(x)dx$ が計算できる」**というもうひとつのポイントがハッキリとした形で表現できることになります. こうして,**「関数 $f(x)$ の積分を求める問題」が「関数 $f(x)$ の原始関数を求める問題」に帰着する**ことが分かります.

2.2 基本的な関数の積分

例えば,

$$(x)' = 1$$

となることに注目すると, $f(x) = 1$ として, 関数 $f(x)$ の原始関数として, $G(x) = x$ と取れることが分かりますから,

$$\begin{aligned}\int_a^b 1dx &= [x]_a^b \\ &= b - a \end{aligned} \tag{19}$$

というような計算ができることが分かります.[10] 全く同様に,

$$(x^2)' = 2x$$

となることに注目すると, $f(x) = x$ として, 関数 $f(x)$ の原始関数として, $G(x) = \frac{x^2}{2}$ と取れることが分かりますから,

$$\begin{aligned}\int_a^b xdx &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b \\ &= \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \end{aligned} \tag{20}$$

というような計算ができることが分かります.[11] より一般に, $n \in \mathbb{N}$ を勝手な自然数として,

$$(x^{n+1})' = (n+1)x^n$$

となることに注目すると, $f(x) = x^n$ として, 関数 $f(x)$ の原始関数として, $G(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ と取れることが分かりますから,

---

[10] 積分とは, 区間 $[a, b]$ 上で関数 $f(x)$ のグラフと x 軸に囲まれた領域の面積を表わしていることに注意すると, (19) 式は, 底辺が $(b - a)$ で高さが 1 の長方形の面積は $(b - a)$ であるということを表わしています.

[11] 前と同様に, 積分とは, 区間 $[a, b]$ 上で関数 $f(x)$ のグラフと x 軸に囲まれた領域の面積を表わしていることに注意すると, (20) 式は, 上底と下底の長さが, それぞれ, a と b で, 高さが $(b - a)$ である台形の面積は,

$$\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{(b+a)(b-a)}{2}$$

であるということを表わしています.

x^n の積分

$$\int_a^b x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} \tag{21}$$

というような計算ができることが分かります.

また, 三角関数 $\sin x$, $\cos x$ に対しては,

$$\begin{cases} (\sin x)' = \cos x \\ (\cos x)' = -\sin x \end{cases}$$

となることに注目すると, $f(x) = \sin x$ として, 関数 $f(x)$ の原始関数として, $G(x) = -\cos x$ と取れることが, また, $f(x) = \cos x$ として, 関数 $f(x)$ の原始関数として, $G(x) = \sin x$ と取れることが分かりますから,

三角関数の積分

$$\int_a^b \sin x dx = [-\cos x]_a^b = -\cos b + \cos a \tag{22}$$

$$\int_a^b \cos x dx = [\sin x]_a^b = \sin b - \sin a \tag{23}$$

というような計算ができることが分かります. 特に,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin x dx &= [-\cos x]_0^\pi \\ &= -\cos \pi + \cos 0 \\ &= -(-1) + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

となることが分かりますから,「sin ひと山」の面積はちょうど 2 であることが分かります.

さらに, 指数関数 e^x に対しては,

$$(e^x)' = e^x$$

となることに注目すると, $f(x) = e^x$ として, 関数 $f(x)$ の原始関数として, $G(x) = e^x$ と取れることが分かりますから,

(選ばれし) 指数関数 e^x の積分

$$\int_a^b e^x dx = [e^x]_a^b = e^b - e^a \tag{24}$$

というような計算ができることが分かります.

2.3 基本的な関数の和の形をした関数の積分

いま, $\boldsymbol{g(x), h(x)}$ **という二つの関数の積分は計算できるものとして,**

$$\boldsymbol{f(x) = g(x) + h(x)} \tag{25}$$

という関数の積分がどのように計算されるのかということを考えてみることにします. このとき, 積分区間 $[a, b]$ の分割 Δ と各小区間の代表点 γ を, 勝手に一組ずつ取ってきて, 関数 $f(x)$ に対する Riemann 和 $S_f(\Delta; \gamma)$ を考えてみると,[12]

$$\begin{aligned} S_f(\Delta; \gamma) &= \sum_{i=1}^{n} f(\gamma_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (g(\gamma_i) + h(\gamma_i))\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(\gamma_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} h(\gamma_i)\Delta x_i \\ &= S_g(\Delta; \gamma) + S_h(\Delta; \gamma) \end{aligned} \tag{26}$$

となることが分かります. よって, (26) 式の両辺で, $|\Delta| \to 0$ となる極限を考えることで,

和の積分

$$\int_a^b (g(x) + h(x))dx = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b h(x)dx \tag{27}$$

となることが分かります.

いま, 関数 $g(x), h(x)$ の原始関数を, それぞれ, $G(x), H(x)$ と表わすことにすると, (27) 式から,

$$\begin{aligned} \int_a^b (g(x) + h(x))dx &= \int_a^b g(x)dx + \int_a^b h(x)dx \\ &= [G(x)]_a^b + [H(x)]_a^b \\ &= (G(b) - G(a)) + (H(b) - H(a)) \\ &= (G(b) + H(b)) - (G(a) + H(a)) \\ &= [G(x) + H(x)]_a^b \end{aligned}$$

なることが分かりますから,

[12] 以下では, どのような関数の Riemann 和を考えているのかということが議論のポイントとなりますから, この点をハッキリと表わすために, 1 節で用いた記号を少し改めて, 分割 Δ と代表点 γ に対する関数 $f(x)$ の Riemann 和を, $S(\Delta; \gamma)$ ではなく, $S_f(\Delta; \gamma)$ というように,「$_f$」という添え字を付けて表わすことにしました.

和の積分 (原始関数を用いた表現)

$$\int_a^b (g(x)+h(x))dx = [G(x)+H(x)]_a^b \tag{28}$$

となることが分かります.[13]

例えば, 2.2 節の結果と合わせると,

$$\begin{aligned}\int_a^b (x+x^3)dx &= \left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right]_a^b && ((21)\text{ 式}, (28)\text{ 式より})\\ &= \left(\frac{b^2}{2}+\frac{b^4}{4}\right)-\left(\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{4}\right)\end{aligned}$$

というような計算ができることが分かります.

また, $f(x)$ が,

$$f(x) = g_1(x)+g_2(x)+g_1(x)$$

というように, 三つの関数の和になっている場合でも, 例えば,

$$f(x) = \{g_1(x)+g_2(x)\}+g_3(x)$$

と考えて, (27) 式を繰り返して適用すれば,

$$\begin{aligned}&\int_a^b (g_1(x)+g_2(x)+g_3(x))\,dx\\ &\quad= \int_a^b (\{g_1(x)+g_2(x)\}+g_3(x))\,dx\\ &\quad= \int_a^b \{g_1(x)+g_2(x)\}dx + \int_a^b g_3(x)dx && ((27)\text{ 式より})\\ &\quad= \left\{\int_a^b g_1(x)dx + \int_a^b g_2(x)dx\right\} + \int_a^b g_3(x)dx && ((27)\text{ 式より})\\ &\quad= \int_a^b g_1(x)dx + \int_a^b g_2(x)dx + \int_a^b g_3(x)dx\end{aligned}$$

というように計算できることが分かります.

全く同様にして, より一般に, $n \in \mathbb{N}$ として, $f(x)$ が n 個の関数の和の形をしている場合にも,

和の微分 (一般形)

$$\int_a^b (g_1(x)+g_2(x)+\cdots+g_n(x))dx = \int_a^b g_1(x)dx+\int_a^b g_2(x)dx+\cdots+\int_a^b g_n(x)dx \tag{29}$$

---

[13] (28) 式は,

$$\begin{aligned}(G(x)+H(x))' &= G'(x)+H'(x)\\ &= g(x)+h(x)\end{aligned}$$

となることに注目して, 関数 $f(x)=g(x)+h(x)$ の原始関数 $F(x)$ として, $F(x)=G(x)+H(x)$ を考えたということに他なりません.

というように積分が計算できることが分かります.[14] 前と同様に, 関数 $g_i(x)$ の原始関数を $G_i(x)$ と表わすことにすると, (29) 式から,

和の微分 (一般形, 原始関数を用いた表現)

$$\int_a^b (g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_n(x))dx = [G_1(x) + G_2(x) + \cdots + G_n(x)]_a^b \tag{30}$$

となることが分かります.[15]

2.4 基本的な関数の実数倍の形をした関数の積分

次に, $\boldsymbol{g(x)}$ **という関数の積分は計算できるものとして,**

$$\boldsymbol{f(x) = 2g(x)}$$

という関数の積分がどのように計算されるのかということを考えてみることにします. 前と同様に, 積分区間 $[a, b]$ の分割 Δ と各小区間の代表点 γ を, 勝手に一組ずつ取ってきて, 関数 $f(x)$ に対する Riemann 和 $S_f(\Delta;\gamma)$ を考えてみると,

$$\begin{aligned} S_f(\Delta;\gamma) &= \sum_{i=1}^{n} f(\gamma_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} 2g(\gamma_i)\Delta x_i \\ &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} g(\gamma_i)\Delta x_i \\ &= 2S_g(\Delta;\gamma) \end{aligned} \tag{31}$$

となることが分かります. よって, (31) 式の両辺で, $|\Delta| \to 0$ となる極限を考えることで,

実数倍の積分 (特殊例)

$$\int_a^b 2g(x)dx = 2\int_a^b g(x)dx \tag{32}$$

となることが分かります.

全く同様に考えると, 勝手な定数 $C \in \mathbb{R}$ に対して,

[14] 興味のある方は, n に関する数学的帰納法を用いて, (29) 式を確かめてみて下さい.

[15] 前と同様, (30) 式は,

$$\begin{aligned} (G_1(x) + G_2(x) + \cdots + G_n(x))' &= G_1'(x) + G_2'(x) + \cdots + G_n'(x) \\ &= g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_n(x) \end{aligned}$$

となることに注目して, 関数 $f(x) = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_n(x)$ の原始関数 $F(x)$ として, $F(x) = G_1(x) + G_2(x) + \cdots + G_n(x)$ を考えたということに他なりません.

実数倍の積分

$$\int_a^b Cg(x)dx = C\int_a^b g(x)dx \tag{33}$$

となることが分かります. いま, 関数 $g(x)$ の原始関数を $G(x)$ と表わすことにすると, (33) 式から,

$$\begin{aligned}\int_a^b Cg(x)dx &= C\int_a^b g(x)dx\\ &= C\cdot[G(x)]_a^b\\ &= C(G(b)-G(a))\\ &= CG(b)-CG(a)\\ &= [CG(x)]_a^b\end{aligned}$$

なることが分かりますから,

実数倍の積分 (原始関数を用いた表現)

$$\int_a^b Cg(x)dx = [CG(x)]_a^b \tag{34}$$

となることが分かります.[16]

さらに, 2.3 節の結果と合わせると, $C_1, C_2, \cdots, C_n \in \mathbb{R}$ として, $f(x)$ が,

$$f(x) = C_1g_1(x) + C_2g_2(x) + \cdots + C_ng_n(x)$$

というように, n 個の関数の「重ね合わせ」の形をしている場合には,[17] 関数 $g_i(x)$ の原始関数を $G_i(x)$ と表わすことにして, (29) 式, (34) 式から,

$$\begin{aligned}&\int_a^b (C_1g_1(x) + C_2g_2(x) + \cdots + C_ng_n(x))dx\\ &\quad= \int_a^b C_1g_1(x)dx + \int_a^b C_2g_2(x)dx + \cdots + \int_a^b C_ng_n(x)dx \qquad &&(\text{(29) 式より})\\ &\quad= [C_1G_1(x)]_a^b + [C_2G_2(x)]_a^b + \cdots + [C_nG_n(x)]_a^b &&(\text{(34) 式より})\\ &\quad= (C_1G_1(b) - C_1G_1(a)) + (C_2G_2(b) - C_2G_2(a))\\ &\qquad + \cdots + (C_nG_n(b) - C_nG_n(a))\\ &\quad= (C_1G_1(b) + C_2G_2(b) + \cdots + C_nG_n(b))\\ &\qquad - (C_1G_1(a) + C_2G_2(a) + \cdots + C_nG_n(a))\end{aligned}$$

[16](34) 式は,

$$\begin{aligned}(CG(x))' &= CG'(x)\\ &= Cg(x)\end{aligned}$$

となることに注目して, 関数 $f(x) = Cg(x)$ の原始関数 $F(x)$ として, $F(x) = CG(x)$ を考えたということに他なりません.

[17]線型代数学の言葉使いを用いれば,「重ね合わせ」とは「線型結合」のことです.

$$= [C_1G_1(x) + C_2G_2(x) + \cdots + C_nG_n(x)]_a^b$$

なることが分かりますから,

「重ね合わせ」の積分 (原始関数を用いた表現)

$$\int_a^b (C_1g_1(x)+C_2g_2(x)+\cdots+C_ng_n(x))dx = [C_1G_1(x)+C_2G_2(x)+\cdots+C_nG_n(x)]_a^b \tag{35}$$

となることが分かります.[18]

例えば, 2.2 節の結果と合わせると,

$$\begin{aligned}\int_a^b (3x^2+5x+1)dx &= \left[3\cdot\frac{x^3}{3}+5\cdot\frac{x^2}{2}+x\right]_a^b \qquad \text{((21) 式, (35) 式より)}\\ &= \left[x^3+\frac{5}{2}x^2+x\right]_a^b\\ &= \left(b^3+\frac{5}{2}b^2+b\right)-\left(a^3+\frac{5}{2}a^2+a\right)\end{aligned}$$

というような計算や,

$$\begin{aligned}\int_a^b (2\cos x+5e^x)dx &= [2\cdot\sin x+5\cdot e^x]_a^b \qquad \text{((23) 式, (24) 式, (35) 式より)}\\ &= [2\sin x+5e^x]_a^b\\ &= \left(2\sin b+5e^b\right)-(2\sin a+5e^a)\end{aligned}$$

というような計算ができることが分かります.

2.5 部分積分

いま, $g(x), h(x)$ を微分できる関数として,

$$f(x) = g(x)h(x)$$

とすると, $f(x) = g(x)h(x)$ の微分は,

$$(g(x)h(x))' = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \tag{36}$$

というように計算できることは, 皆さん良くご存知のことではないかと思います. ここで, $a, b \in \mathbb{R}$ として, (36) 式の両辺を a から b まで積分してみると,

$$\int_a^b (g(x)h(x))'dx = \int_a^b g'(x)h(x)dx + \int_a^b g(x)h'(x)dx \tag{37}$$

[18] (35) 式は,

$$\begin{aligned}(C_1G_1(x)+C_2G_2(x)+\cdots+C_nG_n(x))' &= C_1G_1'(x)+C_2G_2'(x)+\cdots+C_nG_n'(x)\\ &= C_1g_1(x)+C_2g_2(x)+\cdots+C_ng_n(x)\end{aligned}$$

となることに注目して, 関数 $f(x) = C_1g_1(x)+C_2g_2(x)+\cdots+C_ng_n(x)$ の原始関数 $F(x)$ として, $F(x) = C_1G_1(x)+C_2G_2(x)+\cdots+C_nG_n(x)$ を考えたということに他なりません.

という式が得られます．さらに,

$$\int_a^b (g(x)h(x))'dx = [g(x)h(x)]_a^b \tag{38}$$

と表わせることに注意しつつ, (37) 式の右辺の第二項を移項してみると,

部分積分の公式

$$\int_a^b g'(x)h(x)dx = [g(x)h(x)]_a^b - \int_a^b g(x)h'(x)dx \tag{39}$$

という式が得られますが, この (39) 式を**部分積分の公式**と呼びます．いま, (39) 式の右辺の第二項のことは無視して,

$$\int_a^b g'(x)h(x)dx = [g(x)h(x)]_a^b \tag{40}$$

と表わしてみると, (40) 式は, $g'(x)h(x)$ の「原始関数」として, $g'(x)$ の部分だけを原始関数に直して (= 積分して), $g(x)h(x)$ という関数を考えているように見えます．こうした理由で, (39) 式の公式は「部分積分」の公式と呼ばれています．もちろん, 一般には, $g(x)h(x)$ という関数は, $g'(x)h(x)$ という関数の原始関数ではなく, $g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$ という関数の原始関数ですから, (40) 式は正しい等式ではなく, (39) 式のように, 右辺の第二項として「おつりの項」を付けなければならないわけです.

さて, (39) 式という部分積分の公式は,**「$g'(x)h(x)$ という関数の原始関数を求める問題」を「$g(x)h'(x)$ という関数の原始関数を求める問題」に帰着することができる**ということを意味しています．ここで, 関数 $g(x)$ の部分は「脇役」であると考えて,「主役」である $h(x)$ の部分だけに注目することにすると, このことは,**「・$h(x)$ という関数の原始関数を求める問題」を「・$h'(x)$ という関数の原始関数を求める問題」に帰着することができる**ということを意味しています．すなわち,**「被積分関数「・$h(x)$」に現われる $h(x)$ の部分が $h'(x)$ に置き換わってくれれば, もっと原始関数が求めやすくなるのに！」というような場合に, その願いをかなえてくれる**のが「部分積分の公式」ということになります.

例えば,

$$\int_a^b x \sin x dx$$

という積分を考えてみると, このままの形では, $x \sin x$ の原始関数が何になるのかということがすぐには分かりません．一方, 被積分関数 $x \sin x$ のうち, x の部分が, $x \rightsquigarrow (x)' = 1$ というように「化けて」くれれば, $x \sin x \rightsquigarrow \sin x$ となりますから, もう少し原始関数が求めやすい関数に「化けて」くれることになります.[19] そこで, 順番が少し紛らわしいですが,

$$g'(x) = \sin x, \quad h(x) = x$$

[19]実際には, 被積分関数は $g'(x)h(x) \rightsquigarrow g'(x)h'(x)$ ではなく, $g'(x)h(x) \rightsquigarrow g(x)h'(x)$ というように「化ける」ことになりますから, 以下で見るように, $x \sin x \rightsquigarrow -\cos x$ と「化ける」ことになります.

として, (39) 式を適用してみると,

$$\begin{aligned}\int_a^b x\sin x dx &= \int_a^b x\cdot(-\cos x)' dx \\ &= [x\cdot(-\cos x)]_a^b - \int_a^b (x)'\cdot(-\cos x)dx && \text{((39) 式より)} \\ &= [-x\cos x]_a^b - \int_a^b (-\cos x)dx \\ &= [-x\cos x]_a^b + \int_a^b \cos x dx && (41)\end{aligned}$$

となることが分かりますから,[20] (41) 式から, **「$x\sin x$ の原始関数を求める問題」が「$\cos x$ の原始関数を求める問題」に帰着する**ことが分かります. すると, $\cos x$ の原始関数はすぐに分かりますから, (41) 式から,

$$\begin{aligned}\int_a^b x\sin x dx &= [-x\cos x]_a^b + \int_a^b \cos x dx \\ &= [-x\cos x]_a^b + [\sin x]_a^b \\ &= [-x\cos x + \sin x]_a^b\end{aligned}$$

となることが分かります. こうして, $f(x) = x\sin x$ の原始関数として, $F(x) = -x\cos x + \sin x$ が取れることが分かりました.

次に,

$$\int_a^b \log x\, dx$$

という積分を考えてみると, たとえ,

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

となることは知っていたとしても, このままの形では, $\log x$ の原始関数が何になるのかということはすぐには分かりません. 一方, 被積分関数 $\log x$ が, $\log x \rightsquigarrow (\log x)' = \frac{1}{x}$ というように「化けて」くれれば, もう少し原始関数が求めやすい関数に「化けて」くれることになります. そこで, **わざわざ, 「1・」を付け加えて,**

$$\boldsymbol{\log x = 1\cdot\log x}$$

と考えて,

$$\boldsymbol{g'(x) = 1, \quad h(x) = \log x}$$

として, (39) 式を適用してみます. すると,

$$\begin{aligned}\int_a^b \log x\, dx &= \int_a^b 1\cdot\log x\, dx \\ &= \int_a^b (x)'\cdot\log x\, dx \\ &= [x\cdot\log x]_a^b - \int_a^b x\cdot(\log x)' dx && \text{((39) 式より)}\end{aligned}$$

[20] ここで, $g'(x) = \sin x$ の原始関数として, $g(x) = -\cos x$ と取りました.

$$
\begin{aligned}
&= [x \log x]_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x}\, dx \\
&= [x \log x]_a^b - \int_a^b 1 dx \qquad (42)
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから,[21] (42) 式から, **「$\log x$ の原始関数を求める問題」が「定数関数 1 の原始関数を求める問題」に帰着する**ことが分かります. すると, 定数関数 1 の原始関数はすぐに分かりますから, (42) 式から,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \log x\, dx &= [x \log x]_a^b - \int_a^b 1 dx \\
&= [x \log x]_a^b - [x]_a^b \\
&= [x \log x - x]_a^b
\end{aligned}
$$

となることが分かります. こうして, $f(x) = \log x$ の原始関数として, $F(x) = x \log x - x$ が取れることが分かりました.

さて, ここで,「不定積分」という概念について, 少し注意することにします. 2.1 節で見たように, 与えられた関数 $f(x)$ に対して, 関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を見つけることができれば,

原始関数を用いた積分の計算法

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x) dx &= [F(x)]_a^b \qquad (43) \\
&= F(b) - F(a)
\end{aligned}
$$

というように, 関数 $f(x)$ の積分の値を求めることができるのでした.[22] また, これまで見てきた積分の計算も (43) 式をもとにして行なってきましたが, 毎回, 毎回, 積分の上端 b と下端 a を書きながら計算を進めるのは面倒だと思われる方もいるかもしれません.

そこで, この面倒臭さを避けるために, (43) 式の両辺には, いずれも「$\cdot\,{}_a^b$」という表示が現われているということに注目して,「${}_a^b$」という部分を省略して,

不定積分の記法

$$
\int f(x) dx = F(x) \qquad (44)
$$

というように表わすことがあります. すなわち, **$\int f(x)dx$ という記号で, 関数 $f(x)$ の原始関数を表わす**ことがあります. このような意味で $\int f(x)dx$ という記号を用いているときに, $\int f(x)dx$ のことを関数 $f(x)$ の**不定積分**と呼んだりします.[23]

---

[21] ここで, $g'(x) = 1$ の原始関数として, $g(x) = x$ と取りました.

[22] 2.1 節では, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ という「特定の原始関数」と区別するために, 関数 $f(x)$ の「一般の原始関数」を $G(x)$ と表わすことにしましたが, ここでは, 関数 $f(x)$ の「一般の原始関数」を $F(x)$ と表わすことにしました.

[23] 言葉の意味は「積分区間 $[a, b]$ を**特定せずに**積分を考えている」ということです. その意味で, $\int_a^b f(x)dx$ というように, 積分区間 $[a, b]$ を**特定して**積分を考えている場合には, $\int_a^b f(x)dx$ のことを「定積分」と呼んで「不定積分」と区別したりします.

このような記法を用いると, 例えば, 上で行なった計算でも,

$$\begin{aligned}\int \log x\,dx &= x\log x - \int 1dx \\ &= x\log x - x\end{aligned}$$

というように, スッキリした形で進めることができます. ただし, 2.1 節でも注意したように, 与えられた関数 $f(x)$ に対して, 関数 $f(x)$ の原始関数は, 一意的には定まらず, 定数を足し算する分の不定性があります. その意味で, (44) 式の左辺に現われる「不定積分」$\int f(x)dx$ という記号も, **関数 $f(x)$ の特定の原始関数を表わしているわけではなく, 定数を足し算する分の不定性をもった一群の関数を表わしている**ということに注意して下さい.

この点を頭に置かずに, 不定積分の計算を進めると, 例えば,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x}\,dx &= \int 1\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= \int (x)'\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= x\cdot\frac{1}{x} - \int x\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'dx \qquad\text{(部分積分を行なった.)} \\ &= 1 - \int x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx \\ &= 1 + \int \frac{1}{x}\,dx \qquad (45)\end{aligned}$$

という計算を行なった後で,「よって, (45) 式の両辺から $\int \frac{1}{x}\,dx$ を引き算することで,

$$0 = 1 \qquad (46)$$

となる」というような結論を導いて, 少なからずうろたえてしまうことになるかもしれません. 上で注意したように, $\int \frac{1}{x}\,dx$ という表示には定数を足し算する分の不定性がありますから, 上のようにして導いた (46) 式の等号は,「0 と 1 は定数を足し算する分の不定性を除いて等しい」という意味で,「正しい等号」であることに注意して下さい.

このように, 記号が表わす数学的な対象に不定性が生じる場合には, いらない混乱を生じることが多いですから, 皆さんが積分の計算を進める際には, なるべく「不定積分」の概念は用いずに「定積分」の形で計算を進めるか, あるいは,「$\int \frac{1}{x}\,dx$ とは,

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int_0^x \frac{1}{t}\,dt$$

という意味である」というように, 最初に $\int \frac{1}{x}\,dx$ という記号を「特定の原始関数」を表わしているのだと約束した上で計算を進めるかした方が, 積分という概念について, より良く理解できるようになるのではないかと思います. 例えば, 上の (45) 式も, 両辺に「^b_a」を補って考えてみることにすれば,

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = [1]_a^b + \int_a^b \frac{1}{x}\,dx$$

$$= (1-1) + \int_a^b \frac{1}{x}\,dx$$
$$= \int_a^b \frac{1}{x}\,dx$$

となることが分かりますから, どこにも「怪しさ」の残らない正しい式となるわけです.

2.6 置換積分

さて, 1 節では, 与えられた関数 $f(x)$ に対して, 区間 $[a,b]$ 上での関数 $f(x)$ の積分が,

積分の定義

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta|\to 0} S(\Delta;\gamma) \tag{47}$$

というように, Riemann 和の極限として定義できることを見ました. そこで, ここでは, x 軸上の点が, $x = x(t)$ というように, パラメータ t を用いてパラメータ付けされているときに, **(47) 式の積分が, パラメータ t を用いて, どのように表わせるのか**ということを考えてみることにします.

そこで, まず,「パラメータ付け」ということの意味を思い出すことにします. いま, $\mathbb{R}$ 上の微分可能な関数 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が与えられていて, $\alpha,\beta,a,b\in\mathbb{R}$ を, それぞれ, $\alpha<\beta$, $a<b$ となる実数として, 関数 φ を通して, 区間 $[\alpha,\beta]$ 上の点と区間 $[a,b]$ 上の点がピッタリ一対一に対応しているとします.[24] すなわち, 区間 $[\alpha,\beta]$ 上の勝手な点 $t\in[\alpha,\beta]$ に対して,

$$\varphi(t)\in[a,b]$$

となり, 逆に, 区間 $[a,b]$ 上の勝手な点 $x\in[a,b]$ に対して,

$$x=\varphi(t)$$

となる区間 $[\alpha,\beta]$ 上の点 $t\in[\alpha,\beta]$ が唯ひとつだけ存在するとします (図 6 を参照).

このようなピッタリ一対一の対応が与えられているときに, **区間 $[a,b]$ 上の点はパラメータ $t\in[\alpha,\beta]$ を用いてパラメータ付けされる**と呼ぶのでした.[25] このとき, 関数 $\varphi(t)$ は区間 $[\alpha,\beta]$ 上で単調増加関数, あるいは, 単調減少関数のうちのいずれかでなければならないことが分かりますが, 以下では, $\varphi(t)$ は単調増加関数であるとして説明することにします.[26]

[24]慣れてくると, パラメター付けを $x=x(t)$ というように表わすと便利なことも多いわけですが,「座標」と「パラメータ付けを与える関数」を同じ記号「x」で表わしてしまうと, 概念がぼやけてしまい, 自分が何を議論しているのか分からなくなって混乱を生じるという可能性もありますから, 以下では,「パラメータ付けを与える関数」を $x(t)$ ではなく, $\varphi(t)$ と表わすことにしました.

[25]パラメータ付けを定義するためには, 関数 φ の定義域は $\mathbb{R}$ 全体ではなく, $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ というように, 区間 $[\alpha,\beta]$ であれば十分なわけですが, そうすると,「区間 $[\alpha,\beta]$ の端っこの点での微分とは何か？」とか余計なことが気になってしまうといけないので, ここでは, 関数 φ は $\mathbb{R}$ 全体で定義されているとして説明することにしました.

[26]$\varphi(t)$ が単調減少関数のときにも, 全く同様な議論ができます. ここで, $\varphi(t)$ が単調増加関数であるか, あるいは, 単調減少関数であるかということは, $x=\varphi(t)$ というパラメータ付けのもとで, 区間 $[\alpha,\beta]$ の「向き」と区間 $[a,b]$ の「向き」が同じになるのか, 逆になるのかということと対応しています.

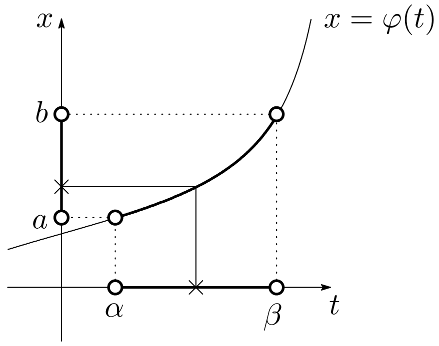

図 6: 関数 φ を通して, 区間 $[\alpha, \beta]$ 上の点と区間 $[a, b]$ 上の点がピッタリ一対一に対応している.

そこで, いま,

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

となるような**区間 $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ の分割**

$$\Delta' = \{t_0, t_1, t_2, \cdots, t_n\} \tag{48}$$

と, 各小区間の代表点 $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ の集合

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \tag{49}$$

が, 勝手にひと組ずつ与えられているとします. このとき, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対して,

$$x_i = \varphi(t_i) \tag{50}$$

という式によって, $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ を定めると,

$$\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\} \tag{51}$$

は**区間 $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ の分割**を定めることが分かります.[27] また, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対して,

$$\gamma_i = \varphi(\xi_i) \tag{52}$$

という式によって, $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ を定めると,

$$\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\} \tag{53}$$

は区間 $[a, b]$ の分割 Δ に対応した代表点を定めることが分かります.[28]

[27]以上の状況は, 次のように考えるとイメージしやすいかもしれません. いま, 変数 t を時間を表わすパラメータであると解釈すると, $x = \varphi(t)$ がパラメータ付けであるとは, 時刻 $t = \alpha$ で $x = a$ にいた点が, 時間の経過とともに x 軸上を右に移動していって, 時刻 $t = \beta$ で $x = b$ に至るということを意味しています. このとき, 途中の時刻 $t = t_i$ のときに点がいる場所を x_i と定めるということです.

[28]前と同様に, 変数 t を時間を表わすパラメータであると解釈すると, 時刻 $t = \xi_i$ のときに点がいる場所を γ_i と定めるということです.

そこで, 区間 $[a,b]$ の分割 Δ と代表点 γ に対する関数 $f(x)$ の Riemann 和

$$S_f(\Delta;\gamma)=\sum_{i=1}^{n} f(\gamma_i)\Delta x_i \tag{54}$$

を考えてみます.[29] ただし, $i=0,1,2,\cdots,n$ に対して,

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \tag{55}$$

と表わしました. このとき, **(54) 式で与えられる Riemann 和 $S_f(\Delta;\gamma)$ をパラメータ t の言葉で表わす**ことを考えてみます. すると, (50) 式, (52) 式, (55) 式から,

$$S_f(\Delta;\gamma)=\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\xi_i))(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})) \tag{56}$$

と表わせることが分かります. ここで, 平均値の定理を用いると, $i=0,1,2,\cdots,n$ に対して,

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

として,

$$\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})=\varphi'(\eta_i)\Delta t_i \tag{57}$$

となる実数 $\eta_i\in\mathbb{R}$ が t_i と t_{i-1} の間に存在することが分かりますから (図 7 を参照), (56) 式, (57) 式から,

$$S_f(\Delta;\gamma)=\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\xi_i))\varphi'(\eta_i)\Delta t_i \tag{58}$$

というように書き直せることが分かります.

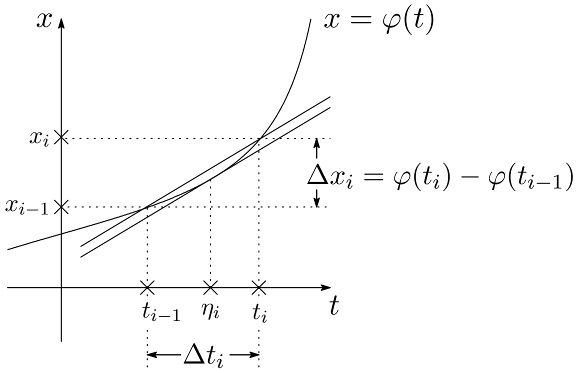

図 7: $\frac{\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})}{\Delta t_i}=\varphi'(\eta_i)$ となる実数 $\eta_i\in\mathbb{R}$ が t_i と t_{i-1} の間に存在する.

さて, (58) 式の右辺は,

$$g(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t) \tag{59}$$

[29]以下では, どのような関数の Riemann 和を考えているのかということが議論のポイントとなりますから, この点をハッキリと表わすために, 1 節で用いた記号を少し改めて, 分割 Δ と代表点 γ に対する関数 $f(x)$ の Riemann 和を, $S(\Delta;\gamma)$ ではなく, $S_f(\Delta;\gamma)$ というように,「$_f$」という添え字を付けて表わすことにしました.

として, 関数 $g(t)$ に対する Riemann 和のような形をしていますが, $f(\varphi(t))$ の部分では $f(\varphi(\xi_i))$ というように $t=\xi_i$ での値が取られ, $\varphi'(t)$ の部分では $\varphi'(\eta_i)$ というように $t=\eta_i$ での値が取られているために, 一般には, 関数 $g(t)$ に対する Riemann 和であるとみなすことはできません. そこで, この点を克服するために, (57) 式で与えられる η_i を各小区間の代表点 $\eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ であると考えて,

$$\eta = \{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n\} \tag{60}$$

として,

$$\xi = \eta$$

と取ってみることにします. すなわち, Riemann 和を考えるためには, 一般には, 区間 $[\alpha, \beta]$ の分割 Δ' に対して, 各小区間の代表点 ξ は分割 Δ' とは独立に取ることができるわけですが, **代表点 ξ として, (60) 式のように, 分割 Δ' に従属して決まるような「特別な代表点」$\xi = \eta$ を取ってみる**ことにします. すると, この場合,

$$\xi_i = \eta_i \tag{61}$$

となりますから, (58) 式より,

$$\begin{aligned} S_f(\Delta;\gamma) &= \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\xi_i))\varphi'(\eta_i)\Delta t_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\eta_i))\varphi'(\eta_i)\Delta t_i && (\,(61)\ 式より) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(\eta_i)\Delta t_i && (\,(59)\ 式より) \\ &= S_g(\Delta';\eta) \end{aligned}$$

というように書き直せることが分かります. すなわち, このような特別な代表点を選ぶことにより,

(特別な代表点のもとでの)Riemann 和の対応

$$S_f(\Delta;\gamma) = S_g(\Delta';\eta) \tag{62}$$

というように関数 $f(x)$ の Riemann 和の値が関数 $g(t)$ の Riemann 和の値として書き直せることが分かります.

以上の準備のもとで, (62) 式の両辺で, $|\Delta'| \to 0$ という極限を考えてみます. すると, $|\Delta'| \to 0$ のとき, $|\Delta| \to 0$ となることが分かりますから,

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S_f(\Delta;\gamma) = \lim_{|\Delta'|\to 0} S_g(\Delta';\eta) \tag{63}$$

となることが分かります．また, 積分の定義より,

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S_f(\Delta;\gamma) = \int_a^b f(x)dx \tag{64}$$

$$\begin{aligned}\lim_{|\Delta'|\to 0} S_g(\Delta';\eta) &= \int_\alpha^\beta g(t)dt \\ &= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (65)\end{aligned}$$

となることが分かりますから, 結局, (63) 式, (64) 式, (65) 式から,

置換積分の公式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{66}$$

となることが分かりました．こうして得られた (66) 式の公式を**置換積分の公式**と呼びます．

いま, $\varphi(t) \rightsquigarrow x(t)$ と書き直すことにすると, (66) 式は,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt$$

と表わせますが, さらに,

$$dx(t) = x'(t)dt \tag{67}$$

であると約束することにすれば, (66) 式は,

置換積分の公式 (書き直し)

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_\alpha^\beta f(x(t))dx(t) \qquad (68) \\ &= \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt \qquad (69)\end{aligned}$$

というように表わせることが分かります．ここで, (68) 式は, $\boldsymbol{x = x(t)}$ **という式によって, $\boldsymbol{x \rightsquigarrow t}$ というように積分変数を変換したときには,「$\boldsymbol{dx}$ の中の $\boldsymbol{x}$ も含めて」, 積分の中身として表わせるすべての $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x \rightsquigarrow x(t)}$ と置き換えればよい**ということを意味していますが, このことが, (69) 式の公式が「置換積分の公式」と呼ばれる理由です．また, 上で行った議論を見返すと, (57) 式において,

$$\begin{aligned}\Delta x_i &= x(t_i) - x(t_{i-1}) \\ &= x'(\eta_i)\Delta t_i \qquad (70)\end{aligned}$$

という書き換えを行っていますが, この (70) 式が, (67) 式に対応していることが分かります．そこで, (70) 式を,

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} = x'(\eta_i)$$

と書き直して, $\Delta t_i \to 0$ という極限を考えてみると, (67) 式とは, 形式的には,「

$$\boldsymbol{\frac{dx(t)}{dt} = x'(t)} \tag{71}$$

という式において, 分母 dt を払った式」であると考えることができます.
　さて, 関数 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすると,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned} \tag{72}$$

というように表わせますが, a, b は,

$$a = x(\alpha), \quad b = x(\beta) \tag{73}$$

と表わせることに注意すると, (72) 式, (73) 式から,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= F(b) - F(a) \\ &= F(x(\beta)) - F(x(\alpha)) \\ &= [F(x(t))]_\alpha^\beta\end{aligned} \tag{74}$$

というように書き直せることが分かります. そこで, (74) 式を用いて, (69) 式を書き直してみると,

$$\int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt = [F(x(t))]_\alpha^\beta \tag{75}$$

という式が得られることが分かります. この (75) 式は, $f(x(t))x'(t)$ という関数の原始関数として, $F(x(t))$ が取れるということを意味していますが, このような書き換えを行なってみると, (69) 式という「置換積分の公式」は, $F(x(t))$ という合成関数の微分が,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(x(t)) &= \frac{dF}{dx}(x(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) \\ &= f(x(t)) \cdot x'(t)\end{aligned}$$

というように計算することができるという事実に対応していることが分かります.
　さて, 実際に, 置換積分の公式を用いるにあたっては,

置換積分の二通りの適用法

(イ)「関数 $f(x)$ の原始関数を求める問題」を「関数 $f(x(t))x'(t)$ の原始関数を求める問題」に帰着する.

(ロ)「関数 $f(x(t))x'(t)$ の原始関数を求める問題」を「関数 $f(x)$ の原始関数を求める問題」に帰着する.

という二通りの適用法を考えることができます.[30] 例えば,

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} \tag{76}$$

という積分を考えたときに,

$$x = \tan\theta \tag{77}$$

というように変数変換してみるというような場合が, (イ) の場合にあたります.[31] このとき, (76) 式の被積分関数は,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1+\tan^2\theta} \\ &= \frac{1}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} \\ &= \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} \\ &= \cos^2\theta \end{aligned} \tag{78}$$

というように書き直すことができます. 一方, (77) 式の両辺を θ で微分してみると,

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \tag{79}$$

となることが分かりますから, (79) 式から,

$$dx = \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \tag{80}$$

と表わせることが分かります.[32] よって, (78) 式, (80) 式から,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} &= \int_\alpha^\beta \cos^2\theta \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \int_\alpha^\beta d\theta \\ &= [\theta]_\alpha^\beta \\ &= [\tan^{-1} x]_a^b \end{aligned} \tag{81}$$

というような計算ができることが分かります. ただし, $x = a$, あるいは, $x = b$ に対応する θ の値を, $\theta = \alpha$, あるいは, $\theta = \beta$ と表わしました.[33] こうして得られた (81) 式は, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ の原始関数として, $F(x) = \tan^{-1} x$ という tan の逆関数が取れることを表わしていますが, このことは,

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

---

[30] ここで, (ロ) の場合を, $x = x(t)$ という式により, 積分変数を $x \rightsquigarrow t$ と変数変換したのだとは考えずに, $t = t(x)$ という式により, 積分変数を $t \rightsquigarrow x$ と変数変換したのだと考えることにすれば, (イ) と (ロ) は本質的に同じことになります.

[31] ここで, $x = x(t) = \tan t$ と書いてしまうと, tan の「t」と変数の「t」とが重なって, 少し見づらくなってしまいますので, $t \rightsquigarrow \theta$ と書き直して, $x = x(\theta) = \tan\theta$ として, $x \rightsquigarrow \theta$ と変数変換することにしました.

[32] 上で注意したように, (67) 式は, (71) 式において, 分母 dt を払った式であると解釈することができます.

[33] すなわち, $a = \tan\alpha$, $b = \tan\beta$ という式によって, $\alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ を定めたということです.

という皆さん良くご存知の事実に対応しているわけです.

次に,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{e^t + e^{-t}} \tag{82}$$

という積分を考えてみます. このとき, (82) 式の被積分関数は少しゴタゴタして見えますが, 例えば,

$$x = e^t \tag{83}$$

というように「文字の置き換え」をして表わしてみると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^t + e^{-t}} &= \frac{1}{x + x^{-1}} \\ &= \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \\ &= \frac{x}{x^2 + 1} \end{aligned} \tag{84}$$

となりますから, 原始関数が何になるのかということがもう少し考えやすい形の関数に書き直すことができます. このように, 与えられた被積分関数がゴタゴタして見える原因を取り出して, その部分をひとまとめにして, $x = x(t)$ と名付けることにより, $t \rightsquigarrow x$ と変数変換してみるというのが, (ロ) の場合にあたります.

今の場合, (83) 式の両辺を t で微分してみると,

$$\frac{dx}{dt} = e^t \tag{85}$$

となることが分かりますから, (85) 式で, 分母 dt を払うことで,

$$dx = e^t dt \tag{86}$$

というように表わせることが分かります. さらに, (86) 式の両辺を e^t で割り算してみると,

$$\begin{aligned} dt &= \frac{1}{e^t}\,dx \\ &= \frac{1}{x}\,dx \end{aligned} \tag{87}$$

というように表わせることが分かります.[34] よって, (84) 式, (87) 式から,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{e^t + e^{-t}} = \int_a^b \frac{x}{x^2+1} \cdot \frac{1}{x}\,dx \tag{88}$$

$$= \int_a^b \frac{dx}{x^2+1} \tag{89}$$

[34]いま, 目標としていることは, (82) 式の積分を**変数 x を用いて表わす**ということですから, (86) 式のように「dx を変数 t で表わした式」ではなくて, (87) 式のように**「dt を変数 x で表わした式」が必要となる**わけです.

というような書き換えができることが分かります.[35] ただし, $t=\alpha$, あるいは, $t=\beta$ に対応する x の値を, $x=a$, あるいは, $x=b$ と表わしました.[36] したがって, (81) 式と (89) 式を合わせることにより,

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \frac{dt}{e^t+e^{-t}} &= \int_a^b \frac{dx}{x^2+1} \\ &= [\tan^{-1} x]_a^b \\ &= [\tan^{-1}(e^t)]_\alpha^\beta\end{aligned}$$

という計算ができることが分かります.

さて, 上で取り上げた例を見返すと,

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2}$$

という積分の場合には,

$$x = \tan\theta \tag{90}$$

というような変数変換のもとで,**「dx の部分まで含めて,「積分の中身」をすべて「新しい変数」θ の言葉で表わす」**ということにより,

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \int_\alpha^\beta d\theta$$

というような書き直しができました. 全く同様に,

$$\int_\alpha^\beta \frac{dt}{e^t+e^{-t}}$$

という積分の場合には,

$$x = e^t \tag{91}$$

というような変数変換のもとで,**「dt の部分まで含めて,「積分の中身」をすべて「新しい変数」x の言葉で表わす」**ということにより,

$$\int_\alpha^\beta \frac{dt}{e^t+e^{-t}} = \int_a^b \frac{dx}{x^2+1}$$

というような書き直しができました.

上では,「置換積分の公式」を用いるにあたっては, (イ), (ロ) という一見したところ異なる二通りの適用の仕方を考えることができると述べましたが, 実際には, 例えば, (90) 式,

[35] ここでは, (87) 式を用いて, (88) 式の書き換えを行ないましたが, 上の議論を見返すと, この書き換えは,

$$\int_\alpha^\beta \frac{dt}{e^t+e^{-t}} = \int_\alpha^\beta \frac{1}{e^t+e^{-t}} \cdot \frac{1}{e^t} \cdot e^t dt$$

と表わして,

$$f(x(t)) = \frac{1}{e^t+e^{-t}} \cdot \frac{1}{e^t}, \quad x'(t) = e^t$$

として, (69) 式を適用したと考えることもできます.

[36] すなわち, $a=e^\alpha$, $b=e^\beta$ と定めたということです.

(91) 式のように, **自分で定めた変数変換のもとで,「$d\cdot$ の部分まで含めて,「積分の中身」をすべて「新しい変数」の言葉で表わす」**という方針を取ることにすれば, **(イ) の場合であるのか, (ロ) の場合であるのかということを全く気にせずに, 置換積分の公式を適用できる**ことになります.