A セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 II」
レポート問題 (その13) の略解

問 1.

$$\begin{aligned} (1) \sin^{-1} \left(\frac{2x-a}{a} \right) & \qquad (2) \sin^{-1}(2x-3) \\ (3) \log \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right) & \qquad (4) \frac{2}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x + \sqrt{x^2-a^2}}{a} \right) \\ (5) \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}} \right) & \end{aligned}$$

これらの原始関数は、例えば、次のようにして求めることができます。

- (1) 与えられた関数の $\sqrt{\quad}$ の中の二次式を平方完成して、定数項の部分が 1 になるように書き直してみると、

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}} \\ &= \frac{2}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{a}x - 1\right)^2}} \end{aligned} \tag{1}$$

となることが分かります。よって、(1) 式から、

$$X = \frac{2}{a}x - 1$$

と変数変換してみることで、

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dX}{\sqrt{1-X^2}} \\ &= \sin^{-1} X \\ &= \sin^{-1} \left(\frac{2x-a}{a} \right) \end{aligned} \tag{2}$$

となることが分かります。ここで、

$$(\sin^{-1} X)' = \frac{1}{\sqrt{1-X^2}}$$

となることに気がつかなくとも, (2) 式において, $X = \sin \theta$ と変数変換して
 みることで,

$$\begin{aligned}\int \frac{dX}{\sqrt{1-X^2}} &= \int d\theta \\ &= \theta \\ &= \sin^{-1} X\end{aligned}$$

となることが分かります.

- (2) 与えられた関数の $\sqrt{\quad}$ の中の二次式を平方完成して, 定数項の部分が 1 になるように書き直してみると,

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{dx}{\sqrt{3x-2-x^2}} \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2 - (x - \frac{3}{2})^2}} \\ &= 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (2x - 3)^2}}\end{aligned}\tag{3}$$

となることが分かります. よって, (3) 式から,

$$X = 2x - 3$$

と変数変換してみることで,

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{dX}{\sqrt{1-X^2}} \\ &= \sin^{-1} X \\ &= \sin^{-1}(2x - 3)\end{aligned}$$

となることが分かります.

- (3) 与えられた関数の $\sqrt{\quad}$ の中の二次式を平方完成して, 定数項の部分が 1 になるように書き直してみると,

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 + (\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2}}\end{aligned}\tag{4}$$

となることが分かります. よって, (4) 式から,

$$X = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

と変数変換してみることで,

$$I = \int \frac{dX}{\sqrt{1+X^2}} \quad (5)$$

となることが分かります. そこで, さらに,

$$X = \sinh t \quad (6)$$

と変数変換してみると, (5) 式から,

$$\begin{aligned} I &= \int dt \\ &= t \end{aligned} \quad (7)$$

となることが分かります. いま, (6) 式から, $T = e^t$ として,

$$X = \frac{T - T^{-1}}{2}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned} 0 &= T^2 - 2XT - 1 \\ &= (T - X)^2 - (X^2 + 1) \end{aligned}$$

となることが分かります. よって,

$$T = X \pm \sqrt{X^2 + 1}$$

となることが分かりますが, $T = e^t > 0$ となることに注意すると,

$$\begin{aligned} e^t &= T \\ &= X + \sqrt{X^2 + 1} \\ &= \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{2x+1 + \sqrt{(2x+1)^2 + 3}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2x+1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right) \quad (8)$$

となることが分かります. よって, (7) 式, (8) 式から,

$$I = \log \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right) + \log \frac{2}{\sqrt{3}}$$

となることが分かります.

(4) $x = a \cosh t$ と変数変換してみると, 与えられた関数の不定積分は,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} \\ &= \int \frac{a \sinh t \, dt}{a \cosh t \cdot \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)}} \\ &= \int \frac{dt}{a \cosh t} \\ &= \frac{2}{a} \int \frac{dt}{e^t + e^{-t}} \end{aligned} \quad (9)$$

というように書き直せることが分かります.¹ さらに, $T = e^t$ と変数変換してみると, (9) 式から,

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{a} \int \frac{dT}{T^2 + 1} \\ &= \frac{2}{a} \tan^{-1} T \end{aligned} \quad (10)$$

となることが分かります. いま, $x = a \cosh t$ から,

$$\frac{x}{a} = \frac{T + T^{-1}}{2}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned} 0 &= T^2 - \frac{2xT}{a} + 1 \\ &= \left(T - \frac{x}{a} \right)^2 - \frac{x^2 - a^2}{a^2} \end{aligned}$$

となることが分かります. よって,

$$T = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

¹ $x = a \cosh t$ という対応で, x と t が一対一に対応するように, $t \geq 0$ と取ることにします. このとき, $e^t \geq 1 \geq e^{-t}$ となりますから, $\sinh t \geq 0$ となることに注意します.

となることが分かりますが, $t \geq 0$ と取っていたことに注意すると,

$$T \geq \frac{1}{T}$$

となることが分かりますから,

$$T = \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \quad (11)$$

となることが分かります.² したがって, (10) 式, (11) 式から,

$$I = \frac{2}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right)$$

となることが分かります.

(5) $x = \sin \theta$ と変数変換してみると, 与えられた関数の不定積分は,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} \\ &= \int \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} \end{aligned} \quad (12)$$

というように書き直せることが分かります. そこで, (12) 式の被積分関数には, $\sin x$ の偶数べきしか登場していないことに注意して, さらに,

$$\begin{aligned} t &= \tan \theta \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

と変数変換してみると,

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta &= 1 - \cos^2 \theta \\ &= 1 - \frac{1}{t^2 + 1} \\ &= \frac{t^2}{t^2 + 1} \\ dt &= \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= (t^2 + 1)d\theta \end{aligned}$$

²このとき,

$$\frac{1}{T} = \frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

となっています.

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{1 + \frac{t^2}{t^2+1}} \cdot \frac{dt}{t^2+1} \\ &= \int \frac{dt}{(\sqrt{2}t)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}(\sqrt{2}t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \end{aligned}$$

となることが分かります.

問 2.

(1) 与えられた二次式を平方完成してみると,

$$\begin{aligned} (\beta - x)(x - \alpha) &= -x^2 + (\alpha + \beta)x - \alpha\beta \\ &= -\left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 + \frac{(\alpha + \beta)^2}{4} - \alpha\beta \\ &= -\left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 + \frac{(\beta - \alpha)^2}{4} \\ &= \frac{(\beta - \alpha)^2}{4} \cdot \left\{1 - \frac{4}{(\beta - \alpha)^2} \left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2\right\} \end{aligned} \quad (13)$$

となることが分かります. よって, (13) 式から,

$$\begin{aligned} X &= \frac{2}{\beta - \alpha} \left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) \\ C &= \frac{\beta - \alpha}{2} \end{aligned} \quad (14)$$

として,

$$\sqrt{(\beta - x)(x - \alpha)} = C\sqrt{1 - X^2}$$

という標準形に書き直せることが分かります.

さらに,

$$X = \cos \theta$$

と定めると, X は $t = \tan \frac{\theta}{2}$ を用いて,

$$X = \cos \theta$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \\
&= \frac{2}{1+t^2} - 1 \\
&= \frac{1-t^2}{1+t^2}
\end{aligned} \tag{15}$$

と表わせることが分かりますから, (15) 式から,

$$t^2 = \frac{1-X}{1+X} \tag{16}$$

となることが分かります. よって, (14) 式, (16) 式から,

$$\begin{aligned}
t^2 &= \frac{1-X}{1+X} \\
&= \frac{1 - \frac{2}{\beta-\alpha} \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{1 + \frac{2}{\beta-\alpha} \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \\
&= \frac{\frac{\beta-\alpha}{2} - \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2} + \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \\
&= \frac{\beta-x}{x-\alpha}
\end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$t = \pm \sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}$$

と表わせることが分かります.

(2) いま, l は点 $A = (\alpha, 0)$ を通り, 傾きが t の直線なので,

$$y = t(x - \alpha) \tag{17}$$

という方程式で与えられることが分かります. そこで, (17) 式を曲線 C を表わす方程式

$$y^2 = (\beta - x)(x - \alpha)$$

に代入してみると,

$$t^2(x - \alpha)^2 = (\beta - x)(x - \alpha)$$

となることが分かりますから,

$$\{t^2(x - \alpha) - (\beta - x)\}(x - \alpha) = 0 \tag{18}$$

となることが分かります. よって, (18) 式から,

$$t^2(\xi - \alpha) - (\beta - \xi) = 0 \tag{19}$$

となることが分かりますから,

$$\xi = \frac{\alpha t^2 + \beta}{t^2 + 1} \quad (20)$$

となることが分かります. したがって, (17) 式, (20) 式から,

$$\begin{aligned} \eta &= t(\xi - \alpha) \\ &= t \left(\frac{\alpha t^2 + \beta}{t^2 + 1} - \alpha \right) \\ &= \frac{(\beta - \alpha)t}{t^2 + 1} \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$P = \left(\frac{\alpha t^2 + \beta}{t^2 + 1}, \frac{(\beta - \alpha)t}{t^2 + 1} \right) \in C$$

というように表わせることが分かります. また, (19) 式から,

$$t^2 = \frac{\beta - \xi}{\xi - \alpha}$$

と表わせることが分かりますから,

$$t = \pm \sqrt{\frac{\beta - \xi}{\xi - \alpha}}$$

と表わせることが分かります.

(3) 与えられた二次式を平方完成してみると,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{|D|}{4a} \\ &= \frac{|D|}{4a} \cdot \left\{ \frac{4a^2}{|D|} \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + 1 \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

となることが分かります. よって, (13) 式から,

$$\begin{aligned} X &= \frac{2a}{\sqrt{|D|}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \\ C &= \frac{\sqrt{|D|}}{2\sqrt{a}} \end{aligned} \quad (22)$$

として,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = C\sqrt{X^2 + 1}$$

という標準形に書き直せることが分かります.

さらに,

$$X = \sinh t$$

と定めると, X は $T = e^t$ を用いて,

$$\begin{aligned} X &= \sinh t \\ &= \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ &= \frac{T - T^{-1}}{2} \end{aligned}$$

と表わせることが分かりますから,

$$\begin{aligned} 0 &= T^2 - 2XT - 1 \\ &= (T - X)^2 - (X^2 + 1) \end{aligned} \tag{23}$$

となることが分かります. よって, (23) 式から,

$$T = X \pm \sqrt{X^2 + 1}$$

となることが分かりますが, $T = e^t > 0$ となることに注意すると,

$$T = X + \sqrt{X^2 + 1} \tag{24}$$

となることが分かります. また, (21) 式, (22) 式から,

$$X^2 + 1 = \frac{4a}{|D|} \cdot (ax^2 + bx + c) \tag{25}$$

と表わせることに注意すると, (22) 式, (24) 式, (25) 式から,

$$\begin{aligned} T &= X + \sqrt{X^2 + 1} \\ &= \frac{2a}{\sqrt{|D|}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) + \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{|D|}} \sqrt{ax^2 + bx + c} \\ &= \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{|D|}} \cdot \left\{ \sqrt{ax} + \sqrt{ax^2 + bx + c} \right\} + \frac{b}{\sqrt{|D|}} \end{aligned}$$

と表わせることが分かります.

「 x と $\sqrt{(x \text{ の二次式})}$ の有理式の積分」については, 「数学 IB 演習 (第 11 回) の略解: p.1, 2 節; p.10, 4 節」を参照.