A セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 II」
レポート問題 (その１３)

問 1. 次の関数の原始関数を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{ax-x^2}}$, $(a>0)$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3x-2-x^2}}$　　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

(4) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}$, $(a>0)$　　(5) $\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

問 2.

(1) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を, $\alpha < \beta$ となる実数とする. このとき, $\sqrt{}$ の中の二次式を平方完成することで,

$$\sqrt{(\beta-x)(x-\alpha)} = C\sqrt{1-X^2}$$

というように標準形の形に書き直せ. さらに,

$$X = \cos\theta$$

と定めるときに, $t = \tan\frac{\theta}{2}$ を x, α, β を用いて表わせ.

(2) (1) と同様に, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を, $\alpha < \beta$ となる実数として,

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = (\beta-x)(x-\alpha)\ \}$$

という (二次) 曲線を考える. また, 曲線 C 上の点 $A = (\alpha, 0)$ を通り, 傾きが t の直線を l とし, 直線 l と曲線 C の交点のうち, A と異なる交点を,

$$P = (\xi, \eta) \in C$$

とする (図 1 を参照). このとき, 点 P の座標 ξ, η を t, α, β を用いて表わせ. 逆に, パラメータ t を ξ, α, β を用いて表わすとどうなるのかも考えてみよ.

(3) $a, b, c \in \mathbb{R}$ を, $a > 0, D = b^2 - 4ac < 0$ となる実数とする. このとき, $\sqrt{}$ の中の二次式を平方完成することで,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = C\sqrt{X^2+1}$$

というように標準形の形に書き直せ. さらに,

$$X = \sinh t$$

と定めるときに, $T = e^t$ を x, a, b, c, D を用いて表わせ.

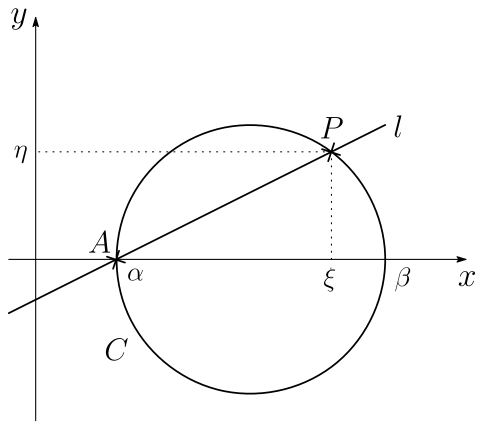

図 1: 点 $A = (\alpha, 0)$ を通り, 傾きが t の直線を l とし, 直線 l と曲線 C の交点のうち, A と異なる交点を $P = (\xi, \eta)$ とする.