A セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 II」
レポート問題 (その１２) の略解

問 1.

(1) それぞれの関数を微分してみると,

$$
\begin{aligned}
(\cosh t)' &= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)' \\
&= \frac{(e^t)' + (e^{-t})'}{2} \\
&= \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\
&= \sinh t \\
(\sinh t)' &= \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)' \\
&= \frac{(e^t)' - (e^{-t})'}{2} \\
&= \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\
&= \cosh t
\end{aligned}
$$

となることが分かります.

(2) いま, 双曲線関数の定義式

$$
\begin{cases}
\cosh\alpha = \dfrac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} \\
\sinh\alpha = \dfrac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}
\end{cases}
\tag{1}
$$

を, 指数関数 $e^\alpha, e^{-\alpha}$ について, 逆に解いてみると,

$$
\begin{cases}
e^\alpha = \cosh\alpha + \sinh\alpha \\
e^{-\alpha} = \cosh\alpha - \sinh\alpha
\end{cases}
\tag{2}
$$

と表わせることに注意します. よって, (1) 式, (2) 式から,

$$
\begin{aligned}
\cosh(\alpha+\beta) &= \frac{1}{2}(e^{\alpha+\beta} + e^{-\alpha-\beta}) && (\ (1)\ \text{式から}\ ) \\
&= \frac{1}{2}(e^\alpha e^\beta + e^{-\alpha}e^{-\beta}) \\
&= \frac{1}{2}\{(\cosh\alpha + \sinh\alpha)(\cosh\beta + \sinh\beta) \\
&\qquad + (\cosh\alpha - \sinh\alpha)(\cosh\beta - \sinh\beta)\} && (\ (2)\ \text{式から}\ )
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta \\
\sinh(\alpha+\beta) &= \frac{1}{2}(e^{\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}) && (\ (1)\ \text{式から}\ ) \\
&= \frac{1}{2}(e^{\alpha}e^{\beta} - e^{-\alpha}e^{-\beta}) \\
&= \frac{1}{2}\{(\cosh\alpha+\sinh\alpha)(\cosh\beta+\sinh\beta) \\
&\qquad - (\cosh\alpha-\sinh\alpha)(\cosh\beta-\sinh\beta)\} && (\ (2)\ \text{式から}\ ) \\
&= \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta
\end{aligned}
$$

となることが分かります.

(3) 双曲線関数の定義から,

$$
\begin{aligned}
\cosh^2 t - \sinh^2 t &= \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}(e^{2t}+2+e^{-2t}) - \frac{1}{4}(e^{2t}-2+e^{-2t}) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

となることが分かります.

問 2.

(1) $x = \cos\theta$ と変数変換してみると, $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1-x^2} &= \sqrt{1-\cos^2\theta} \\
&= \sqrt{\sin^2\theta} \\
&= |\sin\theta| \\
&= \sin\theta \\
dx &= (\cos\theta)' d\theta \\
&= -\sin\theta d\theta
\end{aligned}
$$

となるので,

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_1^{x_0} \sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= -\int_0^{\theta_0} \sin^2\theta\,d\theta \\
&= -\int_0^{\theta_0} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\theta_0} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta_0 - \theta_0\right) \\
&= \frac{1}{2}(\cos\theta_0 \sin\theta_0 - \theta_0) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

となることが分かります.

(2) 直角三角形 $\triangle OPR$ の面積を S_1' とすると, 図から,

$$
\begin{aligned}
S_1 &= S_1' + \int_{x_0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= S_1' - \int_{1}^{x_0} \sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= S_1' - I_1 \qquad (4)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. また,

$$
S_1' = \frac{1}{2}\cos\theta_0 \sin\theta_0 \qquad (5)
$$

となることに注意すると, (3) 式, (4) 式, (5) 式から,

$$
S_1 = \frac{\theta_0}{2}
$$

となることが分かります.

(3) $x = \cosh t$ と変数変換してみると, $t \geq 0$ のとき,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x^2-1} &= \sqrt{\cosh^2 t - 1} \\
&= \sqrt{\sinh^2 t} \\
&= |\sinh t| \\
&= \sinh t \\
dx &= (\cosh t)' dt \\
&= \sinh t dt
\end{aligned}
$$

となるので,

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_1^{x_0} \sqrt{x^2-1}\,dx \\
&= \int_0^{t_0} \sinh^2 t\,dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{t_0} \frac{\cosh 2t - 1}{2}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sinh 2t - t\right]_0^{t_0} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sinh 2t_0 - t_0\right) \\
&= \frac{1}{2}(\cosh t_0 \sinh t_0 - t_0) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

となることが分かります.

(4) 直角三角形 $\triangle OPR$ の面積を S_2' とすると, 図から,

$$
\begin{aligned}
S_2 &= S_2' - \int_1^{x_0} \sqrt{x^2-1}\, dx \\
&= S_2' - I_2 \qquad (7)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. また,

$$
S_2' = \frac{1}{2}\cosh t_0 \sinh t_0 \qquad (8)
$$

となることに注意すると, (6) 式, (7) 式, (8) 式から,

$$
S_2 = \frac{t_0}{2}
$$

となることが分かります.

「指数関数の有理式の積分」については,「数学 IB 演習 (第 9 回) の略解： p.8, 4 節」を参照. また,「双曲線関数」については,「数学 IB 演習 (第 11 回) の略解： p.4, 3 節」を参照.