

A セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 II」
レポート問題 (その 11) の略解

問 1.

- (1) $\frac{1}{4} \left(\tan \frac{x}{2} \right)^2 + \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|$
- (2) $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \log \left| \frac{b \tan \frac{x}{2} - a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b \tan \frac{x}{2} - a - \sqrt{a^2 + b^2}} \right|$
- (3) $x + \frac{2}{\tan \frac{x}{2} + 1}$
- (4) $x \tan \frac{x}{2}$
- (5) (i). $\frac{1}{a} \tan \frac{x}{2}, (a = b \text{ のとき})$
- (ii). $-\frac{1}{a \tan \frac{x}{2}}, (a = -b \text{ のとき})$
- (iii). $\frac{2}{a+b} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right), (a^2 > b^2 \text{ のとき})$
- (iv). $\frac{1}{(b-a)} \sqrt{\frac{b-a}{a+b}} \log \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}{\tan \frac{x}{2} - \sqrt{\frac{a+b}{b-a}}} \right|, (a^2 < b^2 \text{ のとき})$

これらの原始関数は、例えば、次のようにして求めることができます。

(1) $t = \tan \frac{x}{2}$ とすると,

$$\begin{aligned} t^2 + 1 &= \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} + 1 \\ &= \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2} \tag{1}$$

と表わせることが分かります。よって, (1) 式から,

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \\ &= 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{1+t^2} - 1 \\
&= \frac{1-t^2}{1+t^2}
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\
&= 2 \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} \\
&= \frac{2t}{1+t^2}
\end{aligned} \tag{3}$$

となることが分かります. また,

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dx} &= \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{1+t^2}{2}
\end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2} \tag{4}$$

となることも分かります. したがって, (2) 式, (3) 式, (4) 式から,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1 + \sin x}{\sin x (1 + \cos x)} dx &= \int \frac{t^2 + 2t + 1}{2t} dt \\
&= \frac{1}{2} \int \left(t + 2 + \frac{1}{t} \right) dt \\
&= \frac{1}{4} t^2 + t + \frac{1}{2} \log |t|
\end{aligned}$$

となることが分かります.

(2) $t = \tan \frac{x}{2}$ と変数変換してから, 分母を平方完成してみると,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} &= \int \frac{2dt}{2at + b(1-t^2)} \\
&= \frac{-2}{b} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{2at}{b} - 1} \\
&= \frac{-2}{b} \int \frac{dt}{\left(t - \frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a^2+b^2}{b^2}}
\end{aligned} \tag{5}$$

となることが分かります. そこで, さらに,

$$T = t - \frac{a}{b}, \quad R = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$$

としてみると, (5) 式から,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} &= \frac{-2}{b} \int \frac{dT}{T^2 - R^2} \\ &= \frac{1}{bR} \int \left(\frac{1}{T+R} - \frac{1}{T-R} \right) dT \\ &= \frac{1}{bR} \log \left| \frac{T+R}{T-R} \right|\end{aligned}$$

となることが分かります.

(3) まず,

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x dx}{1 + \sin x} &= \int \left(1 - \frac{1}{1 + \sin x} \right) dx \\ &= x - \int \frac{dx}{1 + \sin x}\end{aligned}$$

と変形してから, $t = \tan \frac{x}{2}$ と変数変換してみると,

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x dx}{1 + \sin x} &= x - \int \frac{dx}{1 + \sin x} \\ &= x - \int \frac{2dt}{(t+1)^2} \\ &= x + \frac{2}{t+1}\end{aligned}$$

となることが分かります.

(4) $t = \tan \frac{x}{2}$ と変数変換することを考えてしみると,

$$\begin{aligned}\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx &= 2 \int \left(\tan^{-1} t + \frac{t}{1+t^2} \right) dt \\ &= 2 \int \{ \tan^{-1} t + t (\tan^{-1} t)' \} dt \\ &= 2 \int (t \tan^{-1} t)' dt \\ &= 2t \tan^{-1} t\end{aligned}$$

となることが分かります.

(5) $t = \tan \frac{x}{2}$ と変数変換してみると,

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \int \frac{2dt}{(a-b)t^2 + a+b} \quad (6)$$

となることが分かります. そこで, 場合分けをして考えてみると, (6) 式の右辺は, 次のように表わせることが分かります.

(i) $a = b$ のとき,

$$\begin{aligned}\int \frac{2dt}{(a-b)t^2 + a + b} &= \frac{1}{a} \int dt \\ &= \frac{t}{a}\end{aligned}$$

と表わせることが分かります.

(ii) $a = -b$ のとき,

$$\begin{aligned}\int \frac{2dt}{(a-b)t^2 + a + b} &= \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2} \\ &= -\frac{1}{at}\end{aligned}$$

と表わせることが分かります.

(iii) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) > 0$ のとき,

$$\begin{aligned}\int \frac{2dt}{(a-b)t^2 + a + b} &= \frac{2}{a+b} \int \frac{dt}{\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}t\right)^2 + 1} \\ &= \frac{2}{a+b} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} t \right)\end{aligned}$$

と表わせることが分かります.

(iv) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) < 0$ のとき,

$$R = \sqrt{\frac{a+b}{b-a}}$$

として,

$$\begin{aligned}\int \frac{2dt}{(a-b)t^2 + a + b} &= \frac{1}{(a-b)} \int \frac{2dt}{t^2 - R^2} \\ &= \frac{1}{(a-b)R} \int \left(\frac{1}{t-R} - \frac{1}{t+R} \right) dt \\ &= \frac{1}{(a-b)R} \log \left| \frac{t-R}{t+R} \right| \\ &= \frac{1}{(b-a)R} \log \left| \frac{t+R}{t-R} \right|\end{aligned}$$

と表わせることが分かります.

問 2. 直線 l は, 点 $A = (0, 1)$ を通り, 傾きが t の直線ですから,

$$y = tx + 1 \quad (7)$$

という方程式で与えられることが分かります. また, 単位円 C は,

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (8)$$

という方程式で与えられることが分かります. そこで, (7) 式を (8) 式に代入してみると,

$$x^2 + (tx + 1)^2 = 1$$

となることが分かりますから,

$$\{(t^2 + 1)x + 2t\}x = 0 \quad (9)$$

となることが分かります. よって, 点 P の座標を,

$$P = (\alpha, \beta)$$

とすると, (9) 式から,

$$\alpha = -\frac{2t}{1+t^2} \quad (10)$$

となることが分かります. さらに, (7) 式, (10) 式から,

$$\begin{aligned} \beta &= t\alpha + 1 \\ &= -\frac{2t^2}{1+t^2} + 1 \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

となることが分かります. 以上から, 点 P の座標は,

$$P = \left(-\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)$$

と表わせることが分かります.

「三角関数の有理式の積分」については, 「数学 IB 演習 (第 9 回) の略解 : p.1, 2 節 ; p.6, 3 節」を参照.