A セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 II」
レポート問題 (その１０)

問 1. 指数関数の「多項式の姿」を用いて, 勝手な複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \end{aligned} \tag{1}$$

と定める. (取りあえず, 勝手な複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して, (1) 式の右辺の「無限和」の値がきちんと定まることは認めることにする.) このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $z, w \in \mathbb{C}$ として,

$$e^{z+w} = 1 + (z+w) + \frac{(z+w)^2}{2!} + \frac{(z+w)^3}{3!} + \cdots$$

と

$$e^z \cdot e^w = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) \cdot \left(1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \cdots\right)$$

という二つの式を z, w のベキの形に展開してみたときに, $k, l \in \mathbb{N}$ として, $z^k w^l$ の係数が, それぞれ何になるのかということを比較してみることで,

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \tag{2}$$

となることを示せ. (取りあえず,「無限和」に関する細かい考察は気にせずに, 大らかに考えてみることにする.)

(2) (2) 式と Euler の公式

$$e^{\sqrt{-1}\theta} = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta \tag{3}$$

を用いて考察することで, $x, y \in \mathbb{R}$ として, 勝手な複素数 $z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C}$ に対して, $e^z = e^{x+\sqrt{-1}y} \in \mathbb{C}$ を複素平面上で 図示せよ.

(3) $\theta, \eta \in \mathbb{R}$ として, Euler の公式を用いて,

$$e^{\sqrt{-1}(\theta+\eta)} = e^{\sqrt{-1}\theta} \cdot e^{\sqrt{-1}\eta} \tag{4}$$

という式を書き直せ. すなわち, (4) 式の両辺の実部と虚部を求めて, それらを等式で結んでみよ.

♣ 裏もあります.

問 2.

(1) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ を $\alpha \neq \beta$ となる複素数とする．このとき, $|T| < 1$ となる複素数 $T \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\frac{1}{(1-T)^2} = 1 + 2T + 3T^2 + \cdots$$

となることを用いて,

$$\frac{1}{(z-\beta)^2}$$

の $z = \alpha$ のまわりでの Taylor 展開を求めよ.

(2) 有理関数

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$$

の (複素数の範囲での) 部分分数展開を求めよ.