A セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 II」
レポート問題 (その９) の略解

問 1.

(1) いま, $I_n(x)$ の被積分関数を,

$$\frac{1}{(t^2+1)^n} = \frac{(t)'}{(t^2+1)^n}$$

と考えて部分積分を施してみると,

$$\begin{aligned}
I_n(x) &= \int_0^x \frac{dt}{(t^2+1)^n} \\
&= \int_0^x \frac{(t)'}{(t^2+1)^n} dt \\
&= \left[\frac{t}{(t^2+1)^n}\right]_0^x - \int_0^x \frac{t \cdot (-n) \cdot 2t}{(t^2+1)^{n+1}} dt \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int_0^x \frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}} dt \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int_0^x \frac{(t^2+1)-1}{(t^2+1)^{n+1}} dt \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \left\{ \int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^n} dt - \int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}} dt \right\} \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2nI_n(x) - 2nI_{n+1}(x) \qquad (1)
\end{aligned}$$

となることが分かります. よって, (1) 式から,

$$2nI_{n+1}(x) = (2n-1)I_n(x) + \frac{x}{(x^2+1)^n} \qquad (2)$$

となることが分かります.

(2) いま,

$$(\tan^{-1} t)' = \frac{1}{t^2+1}$$

となることに注意すると,

$$\begin{aligned}
I_1(x) &= \int_0^x \frac{dt}{t^2+1} \\
&= \left[\tan^{-1} t\right]_0^x \\
&= \tan^{-1} x \qquad (3)
\end{aligned}$$

となることが分かります. また, (2) 式で, $n = 1$ としてみると,

$$I_2(x) = \frac{1}{2} I_1(x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1}$$

となることが分かりますから, (3) 式と合わせて,

$$I_2(x) = \frac{1}{2} \tan^{-1} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} \tag{4}$$

となることが分かります. さらに, (2) 式で, $n = 2$ としてみると,

$$I_3(x) = \frac{3}{4} I_2(x) + \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

となることが分かりますから, (4) 式と合わせて,

$$I_3(x) = \frac{3}{8} \tan^{-1} x + \frac{3}{8} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

となることが分かります.

問 2.

(1) $\frac{1}{3} \log |x-1| - \frac{1}{6} \log(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)$

(2) $\frac{1}{4} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \tan^{-1} x$

(3) $\frac{1}{4} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{1}{2} \tan^{-1} x$

(4) $-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{6} \log \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right)$

(5) $-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2} \log(x^2+1)$

それぞれの関数は, 次のように表わせることが分かります.

(1) いま,

$$f(x) = \frac{1}{x^3-1}$$

とします. このとき,

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{1^2+1+1}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

と計算した上で, (5) 式の両辺から右辺の第一項を引き算することで,

$$
\begin{aligned}
\frac{Bx+C}{x^2+x+1} &= \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x-1)} \\
&= \frac{3-(x^2+x+1)}{3(x-1)(x^2+x+1)} \\
&= \frac{-(x^2+x-2)}{3(x-1)(x^2+x+1)} \\
&= \frac{-(x-1)(x+2)}{3(x-1)(x^2+x+1)} \\
&= -\frac{1}{3}\cdot\frac{x+2}{x^2+x+1} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. よって, (5) 式, (6) 式から,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x+2}{x^2+x+1} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2x+4}{x^2+x+1} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{x^2+x+1} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{6}\cdot\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{6}\cdot\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2+1} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{6}\cdot\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}
\end{aligned}
$$

と表わせることが分かります.

(2) 与えられた関数は,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x^4-1} &= \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} \\
&= \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}
\end{aligned}
$$

と表わせることが分かります.

(3) 与えられた関数は,

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{x^4-1} &= \frac{x^2}{(x^2-1)(x^2+1)} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\end{aligned}$$

と表わせることが分かります.

(4) いま,

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x^3+1)}$$

とすると,

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2(x^2-x+1)}$$

と表わせることに注意します. このとき,

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{(x+1)^2(x^2-x+1)} \\ &= \frac{1}{(-1)^2-(-1)+1}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{Cx+D}{(x^2-x+1)} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{Cx+D}{(x^2-x+1)} \qquad (7)\end{aligned}$$

と計算した上で, (7) 式の両辺から右辺の第一項を引き算することで,

$$\begin{aligned}\frac{B}{(x+1)}+\frac{Cx+D}{(x^2-x+1)} &= \frac{1}{(x+1)^2(x^2-x+1)}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{3-(x^2-x+1)}{3(x+1)^2(x^2-x+1)} \\ &= \frac{-(x^2-x-2)}{3(x+1)^2(x^2-x+1)} \\ &= \frac{-(x+1)(x-2)}{3(x+1)^2(x^2-x+1)} \\ &= \frac{-(x-2)}{3(x+1)(x^2-x+1)} \qquad (8)\end{aligned}$$

となることが分かります．よって, (8) 式から,

$$\begin{aligned} B &= \frac{-(-1-2)}{3\{(-1)^2-(-1)+1\}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となることが分かるので, (7) 式と合わせて,

$$f(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2-x+1)} \tag{9}$$

となることが分かります．

あるいは, $\frac{1}{x^2-x+1}$ の $x=-1$ のまわりでの Taylor 展開を求めてみると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-x+1} &= \frac{1}{\{(x+1)-1\}^2-\{(x+1)-1\}+1} \\ &= \frac{1}{(X-1)^2-(X-1)+1} && (\ X=x+1 \text{ とした}\ ) \\ &= \frac{1}{X^2-3X+3} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{X(X-3)}{3}} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+T} && (\ T{=}\tfrac{X(X-3)}{3} \text{ とした}\ ) \\ &= \frac{1}{3}\cdot(1-T+T^2-\cdots) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\left\{1-\frac{X(X-3)}{3}+\frac{X^2(X-3)^2}{9}-\cdots\right\} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\{1+X+\cdots\} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\{1+(x+1)+\cdots\} \end{aligned}$$

となることからも,

$$f(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2-x+1)}$$

となることが分かります．

よって, (9) 式から,

$$\begin{aligned} \frac{Cx+D}{(x^2-x+1)} &= f(x) - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2(x^2-x+1)} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3-(x^2-x+1)-(x+1)(x^2-x+1)}{3(x+1)^2(x^2-x+1)} \\
&= \frac{3-(X^2-3X+3)-X(X^2-3X+3)}{3(x+1)^2(x^2-x+1)} \quad (\ X=x+1 \text{ とした }) \\
&= \frac{-X^3+2X^2}{3(x+1)^2(x^2-x+1)} \\
&= \frac{-X^2(X-2)}{3(x+1)^2(x^2-x+1)} \\
&= \frac{-(x+1)^2(x-1)}{3(x+1)^2(x^2-x+1)} \\
&= \frac{-(x-1)}{3(x^2-x+1)} \\
&= -\frac{1}{3}\cdot\frac{x-1}{x^2-x+1} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. したがって, (9) 式, (10) 式から,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x-1}{x^2-x+1} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2x-2}{x^2-x+1} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^2-x+1} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\frac{4}{3}(x-\frac{1}{2})^2+1} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}
\end{aligned}
$$

と表わせることが分かります.

(5) いま, $t=x^2$ と変数変換してみると,

$$
\int\frac{x^5dx}{(x^2+1)^3}=\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{(t+1)^3}dt \qquad (11)
$$

と表わせることが分かります. さらに, (11) 式の右辺の積分の被積分関数は,

$$
\begin{aligned}
\frac{t^2}{(t+1)^3} &= \frac{\{(t+1)-1\}^2}{(t+1)^3} \\
&= \frac{(t+1)^2-2(t+1)+1}{(t+1)^3} \\
&= \frac{1}{(t+1)^3}-\frac{2}{(t+1)^2}+\frac{1}{t+1}
\end{aligned}
$$

と表わせることが分かります.

「実数係数の有理関数の部分分数展開」については,「数学 IB 演習 (第 8 回) の略解：p.14, 7 節」を参照. また,「有理関数の原始関数を求める方法」については,「数学 IB 演習 (第 8 回) の略解：p.16, 8 節」,「数学 IB 演習 (第 9 回) の略解：p.14, 7 節；p.15, 8 節」を参照.