

A セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 II」 レポート問題 (その 8) の略解

問 1.

(1) いま,

$$f(x) = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3} \quad (1)$$

として, (1) 式の右辺を計算してみると,

$$\begin{aligned} & \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3} \\ &= \frac{(B+C)x^2 + (A+2B-2C)x + (3A-3B+C)}{(x-1)^2(x+3)} \end{aligned}$$

となることが分かります. したがって,

$$\begin{cases} B+C=0 \\ A+2B-2C=3 \\ 3A-3B+C=1 \end{cases} \quad (2)$$

でなければならないことが分かります. そこで, (2) 式の連立一次方程式を解いてみると,

$$A=1, B=\frac{1}{2}, C=-\frac{1}{2}$$

となることが分かります.

(2) (1) 式の両辺に $(x-1)^2$ を掛け算すると,

$$g(x) = A + B(x-1) + \frac{C}{x+3} \cdot (x-1)^2 \quad (3)$$

となることが分かります. このとき, $\frac{1}{x+3}$ の $x=1$ のまわりでの Taylor 展開を,

$$\frac{1}{x+3} = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots \quad (4)$$

と表わすことにすると,¹ (3) 式と (4) 式から, $g(x)$ の $x=1$ のまわりでの Taylor 展開は,

$$\begin{aligned} g(x) &= A + B(x-1) + C \{a_0 + a_1(x-1) + \cdots\} \cdot (x-1)^2 \\ &= A + B(x-1) + a_0 C(x-1)^2 + a_1 C(x-1)^3 + \cdots \end{aligned} \quad (5)$$

と表わされることが分かります.

¹実際には, $a_0 = \frac{1}{4}, a_1 = -\frac{1}{4^2}, a_2 = \frac{1}{4^3}, \cdots$ となることが分かります.

(3) $\frac{1}{1+T}$ という関数の $T = 0$ のまわりでの Taylor 展開が,

$$\frac{1}{1+T} = 1 - T + T^2 - T^3 + \dots \quad (6)$$

となることに注意すると, $g(x)$ の $x = 1$ のまわりでの Taylor 展開は,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{3x+1}{x+3} \\ &= \frac{3(x-1)+4}{(x-1)+4} \\ &= \frac{1+\frac{3}{4}(x-1)}{1+\frac{1}{4}(x-1)} \\ &= \left\{1 + \frac{3}{4}(x-1)\right\} \times \left\{1 - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{16}(x-1)^2 + \dots\right\} \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

となることが分かります.² したがって, (5) 式と (7) 式から,

$$A = 1, \quad B = \frac{1}{2}$$

となることが分かります.³

(4) (1) の結果から,

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+3)}$$

と表わされることが分かるので, 右辺を積分してみると, $f(x)$ の原始関数のひとつとして,

$$-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \log|x-1| - \frac{1}{2} \log|x+3| = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+3} \right|$$

が取れることが分かります.

²最後から 2 番目の等号で, $T = \frac{1}{4}(x-1)$ として (6) 式を用いました.

³もちろん, これは, (1) の結果と一致します.

問 2.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{2}{5} \log |x-3| + \frac{3}{5} \log |x+2|, & (2) \quad & \frac{1}{2} \log \left| \frac{x+2}{x+4} \right|, \\
 (3) \quad & \log \{(x-2)^2|x+1|\}, & (4) \quad & \frac{1}{4} \log |x-1| + \frac{3}{4} \log |x+3|, \\
 (5) \quad & \frac{1}{6} \log |x| + \frac{1}{2} \log |x-2| + \frac{1}{3} \log |x+3|, & (6) \quad & \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{11}{4} \log \left| \frac{x+1}{x+3} \right|.
 \end{aligned}$$

それぞれの関数は、次のように表わせることが分かります。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{x-1}{(x-3)(x+2)} = \frac{3-1}{3+2} \cdot \frac{1}{x-3} + \frac{-2-1}{-2-3} \cdot \frac{1}{x+2} \\
 & = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{x-3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x+2}. \\
 (2) \quad & \frac{1}{x^2+6x+8} = \frac{1}{(x+2)(x+4)} \\
 & = \frac{1}{-2+4} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{1}{-4+2} \cdot \frac{1}{x+4} \\
 & = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right). \\
 (3) \quad & \frac{3x}{x^2-x-2} = \frac{3x}{(x-2)(x+1)} \\
 & = \frac{3 \cdot 2}{2+1} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{3 \cdot (-1)}{-1-2} \cdot \frac{1}{x+1} \\
 & = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1}. \\
 (4) \quad & \frac{x}{x^2+2x-3} = \frac{x}{(x-1)(x+3)} \\
 & = \frac{1}{1+3} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{-3}{-3-1} \cdot \frac{1}{x+3} \\
 & = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x+3}. \\
 (5) \quad & \frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x} = \frac{x^2+x-1}{x(x-2)(x+3)} \\
 & = \frac{0^2+0-1}{(0-2)(0+3)} \cdot \frac{1}{x} + \frac{2^2+2-1}{2(2+3)} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{(-3)^2-3-1}{(-3)(-3-2)} \cdot \frac{1}{x+3} \\
 & = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+3}. \\
 (6) \quad & \frac{2x-5}{(x+1)^2(x+3)} = -\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{11}{4} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{11}{4} \cdot \frac{1}{x+3}
 \end{aligned}$$

ただし, (6) においては, 例えば,

$$\begin{aligned}\frac{2x-5}{(x+1)^2(x+3)} &= A \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + B \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{2 \cdot (-3) - 5}{(-3+1)^2} \cdot \frac{1}{x+3} \\ &= A \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + B \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{11}{4} \cdot \frac{1}{x+3}\end{aligned}\tag{8}$$

と計算した上で, (8) 式の両辺から右辺の第3項を引き算することで,

$$\begin{aligned}A \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + B \cdot \frac{1}{x+1} &= \frac{2x-5}{(x+1)^2(x+3)} + \frac{11}{4} \cdot \frac{1}{x+3} \\ &= \frac{4(2x-5) + 11(x+1)^2}{4(x+1)^2(x+3)} \\ &= \frac{(8x-20) + (11x^2 + 22x + 11)}{4(x+1)^2(x+3)} \\ &= \frac{11x^2 + 30x - 9}{4(x+1)^2(x+3)} \\ &= \frac{(11x-3)(x+3)}{4(x+1)^2(x+3)} \\ &= \frac{11(x+1) - 14}{4(x+1)^2} \\ &= \frac{-14 + 11(x+1)}{4(x+1)^2} \\ &= -\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{11}{4} \cdot \frac{1}{x+1}\end{aligned}$$

というように計算できます.

あるいは, $\frac{2x-5}{x+3}$ の $x = -1$ のまわりでの Taylor 展開が,

$$\begin{aligned}\frac{2x-5}{x+3} &= \{2(x+1) - 7\} \cdot \frac{1}{(x+1) + 2} \\ &= \{2(x+1) - 7\} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}(x+1)} \\ &= \left\{-\frac{7}{2} + (x+1)\right\} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}(x+1)} \\ &= \left\{-\frac{7}{2} + (x+1)\right\} \cdot \left\{1 - \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{4}(x+1)^2 + \dots\right\} \\ &= -\frac{7}{2} + \left(\frac{7}{4} + 1\right)(x+1) + \left(-\frac{7}{8} - \frac{1}{2}\right)(x+1)^2 + \dots \\ &= -\frac{7}{2} + \frac{11}{4}(x+1) - \frac{11}{8}(x+1)^2 + \dots\end{aligned}$$

となることを用いて,

$$A \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + B \cdot \frac{1}{x+1} = -\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{11}{4} \cdot \frac{1}{x+1}$$

というように求めることもできます.

「有理関数」や「有理関数の部分分数展開」, さらに, 「部分分数展開と Taylor 展開との関係」については, 「数学 IB 演習 (第 8 回) の略解: p.3, 3 節; p.4, 4 節; p.7, 5 節」を参照.