A セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 II」
レポート問題 (その 7) の略解

問 1.

(1) 行列 A の特性多項式 $\varphi_A(t)$ を求めてみると, 例えば,

$$\begin{aligned}
\varphi_A(t) &= \det(tI - A) \\
&= \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ -1 & 0 & t \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ t^2 & t & -1 \\ -1 & 0 & t \end{vmatrix} && (\text{ 1 列目} + \text{ 2 列目} \times t\ ) \\
&= \begin{vmatrix} t^2 & -1 \\ -1 & t \end{vmatrix} && (\text{ 1 行目で展開 }) \\
&= t^3 - 1 && (1)
\end{aligned}$$

となることが分かります. よって, (1) 式から, 行列 A の固有値 λ は,

$$\omega = e^{2\pi\sqrt{-1}/3} = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$$

として,

$$\lambda = 1,\ \omega,\ \omega^2$$

となることが分かります.

次に, それぞれの固有値 λ に対する固有ベクトルをすべて求めてみることにします. そのために, $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$ として,

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \iff (\lambda I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{2}$$

と書き直して, (2) 式の右辺の連立一次方程式の解をすべて求めてみることにします. いま,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

と表わすことにすると, (2) 式の右辺の連立一次方程式は,

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

と表わすことができます．そこで,

$$\lambda^3 = 1$$

となることに注意して, (3) 式の連立一次方程式に対して, 行に関する基本変形を施してみると, 例えば,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[3\text{ 行目}\times(-1)]{1\text{ 行目}+3\text{ 行目}\times\lambda} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[1\text{ 行目}\times(-1)]{2\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times\lambda} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3-1 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[2\text{ 行目}\leftrightarrow 3\text{ 行目}]{1\text{ 行目}\leftrightarrow 3\text{ 行目}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3-1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

というように変形できることが分かります．したがって, (3) 式の連立一次方程式は,

$$\begin{cases} x - \lambda z = 0 \\ y - \lambda^2 z = 0 \end{cases} \tag{4}$$

という「精一杯の見やすい形」の連立一次方程式に書き直せることが分かります．そこで, (4) 式の「精一杯の見やすい形」の連立一次方程式を解いてみると, (3) 式の連立一次方程式の解は,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= t \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C} \end{aligned} \tag{5}$$

となることが分かります.[1] よって, (5) 式における $(\lambda t) \in \mathbb{C}$ を, 改めて, $t \in \mathbb{C}$ と表わすことにすると, それぞれの固有値 $\lambda = 1, \omega, \omega^2$ に対する固有ベクトルは,

[1] ここで, (4) 式を「z の値を勝手にひとつ決めたときに, x, y の値がどう決まるのか」ということを表わしている式であると解釈しました．また, 後で, より見やすい形になるように, $1 = \lambda^3$ と表わせることに注意して, (5) 式では, ベクトルの成分から λ という因子を括り出して表わすことにしました.

(i) $\lambda = 1$ のとき,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}$$

(ii) $\lambda = \omega$ のとき,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}$$

(iii) $\lambda = \omega^2$ のとき,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega^4 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}$$

となることが分かります.

(2) (1) の結果から,

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix},\ \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega^4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

とすると,

$$\begin{cases} A\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1 \\ A\mathbf{p}_2 = \omega\mathbf{p}_2 \\ A\mathbf{p}_3 = \omega^2\mathbf{p}_3 \end{cases} \tag{6}$$

となることが分かります. よって, (6) 式から,

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

として,

$$AP = P\Lambda \tag{7}$$

となることが分かります．さらに，行列 P の行列式を計算してみると，例えば，

$$\begin{aligned}
\det P &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \omega - 1 & \omega^2 - 1 \\ 0 & \omega^2 - \omega & \omega^4 - \omega^2 \end{vmatrix} && \left(\begin{array}{l} 3\,\text{行目} + 2\,\text{行目} \times (-1) \\ 2\,\text{行目} + 1\,\text{行目} \times (-1) \end{array} \right) \\
&= \begin{vmatrix} \omega - 1 & \omega^2 - 1 \\ \omega(\omega - 1) & \omega^2(\omega^2 - 1) \end{vmatrix} && (\ 1\,\text{列目で展開}\ ) \\
&= (\omega - 1)(\omega^2 - 1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \omega & \omega^2 \end{vmatrix} \\
&= (\omega - 1)(\omega^2 - 1)(\omega^2 - \omega)
\end{aligned}$$

となることが分かりますから，

$$\det P = (\omega - 1)(\omega^2 - 1)(\omega^2 - \omega) \neq 0$$

となることが分かります．よって，P は正則行列となることが分かりますから，(7) 式の両辺に左から P^{-1} を掛け算することで，

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

となることが分かります．

問 2.

(1) 行列 X の行列式を直接計算してみると，例えば，

$$\begin{aligned}
F(x, y, z) &= \det X \\
&= \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} \\
&= x \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ z & x \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} z & y \\ y & x \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} z & x \\ y & z \end{vmatrix} && (\ 1\,\text{行目で展開}\ ) \\
&= x(x^2 - yz) - y(xz - y^2) + z(z^2 - yy) \\
&= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz
\end{aligned}$$

となることが分かります．

(2) いま,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix} \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= xI + yA + zA^2 \end{aligned} \tag{8}$$

と表わせることが分かります.

(3) 問 1 の結果から,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

として,

$$P^{-1}AP = \Lambda \tag{9}$$

となることが分かります. よって, (9) 式から,

$$A = P\Lambda P^{-1} \tag{10}$$

と表わせることが分かりますから, (8) 式, (10) 式から,

$$\begin{aligned} X &= xI + yA + zA^2 \\ &= xI + y(P\Lambda P^{-1}) + z(P\Lambda P^{-1})^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= xI + y(P\Lambda P^{-1}) + z(P\Lambda^2 P^{-1}) \\
&= P\cdot(xI)\cdot P^{-1} + P\cdot(y\Lambda)\cdot P^{-1} + P\cdot(z\Lambda^2)\cdot P^{-1} \\
&= P\cdot(xI + y\Lambda + z\Lambda^2)\cdot P^{-1} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

と表わせることが分かります.

(3) (11) 式より,

$$
\begin{aligned}
\det X &= \det\left(P\cdot(xI + y\Lambda + z\Lambda^2)\cdot P^{-1}\right) \\
&= \det P\cdot\det(xI + y\Lambda + z\Lambda^2)\cdot\det(P^{-1}) \\
&= \det P\cdot\det(P^{-1})\cdot\det(xI + y\Lambda + z\Lambda^2) \\
&= \det P\cdot(\det P)^{-1}\cdot\det(xI + y\Lambda + z\Lambda^2) \\
&= \det(xI + y\Lambda + z\Lambda^2) \qquad (12)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. 一方,

$$
\begin{aligned}
xI + y\Lambda + z\Lambda^2 &= x\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix} + z\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x+y+z & 0 & 0 \\ 0 & x+\omega y+\omega^2 z & 0 \\ 0 & 0 & x+\omega^2 y+\omega^4 z \end{pmatrix} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから, (12) 式, (13) 式から,

$$
\begin{aligned}
F(x,y,z) &= \det X \\
&= (x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega^4 z)
\end{aligned}
$$

というように, $F(x,y,z)$ は一次式の積の形に因数分解できることが分かります.

「行列の対角化の問題」や「固有値, 固有ベクトル」との関係については,「数学 II 演習 (第 9 回) の略解 : p.19, 3 節」を参照.