A セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 II」
レポート問題 (その６) の略解

問 1.

(1) 基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する線型写像 $D : V_2 \to V_2$ の表現行列 $\hat{D}$ を求めるには,

(イ) 基底の元の行き先 $D(\mathbf{1}), D(\mathbf{x}), D(\mathbf{x^2}) \in V_2$ の「番地」を求める.
($\Longrightarrow$ これらの「番地」を並べたものが表現行列 $\hat{D}$ になる.)

(ロ) 基底 $\{1, x, x^2\}$ を用いた「番地割り」$V_2 \cong \mathbb{R}^3$ のもとで,

$$V_2 \ni \mathbf{f} = a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{x} + a_2\mathbf{x^2} \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

と対応しているときに, $D(\mathbf{f}) \in V_2$ の「番地」を,

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

を用いて表わす.
($\Longrightarrow$ このとき,

$$V_2 \ni D(\mathbf{f}) \;\longleftrightarrow\; \hat{D}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

と対応しているはず.)

という二つの方法を考えることができます. 表現行列 $\hat{D}$ を求めるためには, どちらの方法を用いても構わないわけですが, 皆さんの参考のために, 以下では, それぞれの方法を用いて表現行列 $\hat{D}$ を求めると, どのようなことになるのかということを順番に見てみることにします.

そこで, まず, (イ) という方法にもとづいて考えてみます. いま, 線型写像 D の定義にもとづいて, $D(\mathbf{1}), D(\mathbf{x}), D(\mathbf{x^2}) \in V_2$ を求めてみると, それぞれ,

$$\begin{aligned} D(\mathbf{1}) &= (x^2+1)\cdot\frac{d^2}{dx^2}(1) + (x-1)\cdot\frac{d}{dx}(1) \\ &= (x^2+1)\cdot 0 + (x-1)\cdot 0 \\ &= 0\mathbf{1} + 0\mathbf{x} + 0\mathbf{x^2} \end{aligned} \tag{1}$$

$$
\begin{aligned}
D(\mathbf{x}) &= (x^2+1)\cdot\frac{d^2}{dx^2}(x) + (x-1)\cdot\frac{d}{dx}(x) \\
&= (x^2+1)\cdot 0 + (x-1)\cdot 1 \\
&= (-1)\mathbf{1} + 1\mathbf{x} + 0\mathbf{x^2} \qquad (2)\\
D(\mathbf{x^2}) &= (x^2+1)\cdot\frac{d^2}{dx^2}(x^2) + (x-1)\cdot\frac{d}{dx}(x^2) \\
&= (x^2+1)\cdot 2 + (x-1)\cdot 2x \\
&= 2\mathbf{1} + (-2)\mathbf{x} + 4\mathbf{x^2} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. よって, (1) 式, (2) 式, (3) 式から, これらの元の「番地」は, それぞれ,

$$
\begin{aligned}
V_2 \ni D(\mathbf{1}) &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \\
V_2 \ni D(\mathbf{x}) &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \\
V_2 \ni D(\mathbf{x^2}) &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから, 表現行列 $\hat{D}$ は,

$$
\hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}
$$

となることが分かります.

次に, (ロ) という方法にもとづいて考えてみます. いま,

$$
V_2 \ni \mathbf{f} = a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{x} + a_2\mathbf{x^2} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3
$$

と対応しているとして, 線型写像 D の定義にもとづいて, $D(\mathbf{f}) \in V_2$ を求めてみると,

$$
D(\mathbf{f}) = (x^2+1)\cdot\frac{d^2}{dx^2}(a_0 + a_1x + a_2x^2) + (x-1)\cdot\frac{d}{dx}(a_0 + a_1x + a_2x^2)
$$

$$
\begin{aligned}
&= (x^2+1)\cdot 2a_2 + (x-1)\cdot(a_1+2a_2x) \\
&= (-a_1+2a_2)\mathbf{1} + (a_1-2a_2)\mathbf{x} + 4a_2\mathbf{x^2} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. よって, (4) 式から,

$$
V_2 \ni D(\mathbf{f}) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -a_1+2a_2 \\ a_1-2a_2 \\ 4a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3
$$

と対応することが分かりますから, 表現行列 $\hat{D}$ は,

$$
\hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}
$$

となることが分かります.[1]

(2) $\{1, 1-x, 2-2x+3x^2\}$ を基底 $\{1, x, x^2\}$ を用いて表わすと,

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1-x & 2-2x+3x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
$$

となることが分かります. よって, P は,

$$
P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
$$

と表わせることが分かります.

(3) 行列 P と単位行列 I を横に並べて, 行に関する同じ基本変形を施すと, 例えば,

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ 行目} + 2\text{ 行目} \times 1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{2\text{ 行目} \times (-3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目} + 3\text{ 行目} \times (-2)}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ 行目} \times 3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

[1] もちろん, これは, (イ) という方法にもとづいて求めた表現行列 $\hat{D}$ と同じものです.

というように変形できることが分かります. したがって, 各行を $\frac{1}{3}$ 倍することで,

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となることが分かります.

(4) (1), (2), (3) の結果と「表現行列の変換公式」から, 基底 $\{1, 1-x, 2-2x+3x^2\}$ に関する線型写像 D の表現行列 $\check{D}$ は,

$$\begin{aligned}
\check{D} &= P^{-1}\hat{D}P \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となることが分かります.

(5) 線型写像 D の定義にもとづいて, $D(\mathbf{1}), D(\mathbf{1-x}), D(\mathbf{2-2x+3x^2}) \in V_2$ を求めてみると, それぞれ,

$$\begin{aligned}
D(\mathbf{1}) &= (x^2+1)\cdot\frac{d^2}{dx^2}(1) + (x-1)\cdot\frac{d}{dx}(1) \\
&= (x^2+1)\cdot 0 + (x-1)\cdot 0 \\
&= 0\mathbf{1} + 0(\mathbf{1-x}) + 0(\mathbf{2-2x+3x^2}) \qquad (5) \\
D(\mathbf{1-x}) &= (x^2+1)\cdot\frac{d^2}{dx^2}(1-x) + (x-1)\cdot\frac{d}{dx}(1-x) \\
&= (x^2+1)\cdot 0 + (x-1)\cdot(-1) \\
&= 0\mathbf{1} + 1(\mathbf{1-x}) + 0(\mathbf{2-2x+3x^2}) \qquad (6) \\
D(\mathbf{2-2x+3x^2}) &= (x^2+1)\cdot\frac{d^2}{dx^2}(2-2x+3x^2) \\
&\quad + (x-1)\cdot\frac{d}{dx}(2-2x+3x^2) \\
&= (x^2+1)\cdot 6 + (x-1)\cdot(-2+6x) \\
&= 8-8x+12x^2
\end{aligned}$$

$$= 0\mathbf{1} + 0(\mathbf{1} - \mathbf{x}) + 4(\mathbf{2} - \mathbf{2x} + \mathbf{3x^2}) \tag{7}$$

となることが分かります．よって, (5) 式, (6) 式, (7) 式から, 基底 $\{1, 1-x, 2-2x+3x^2\}$ を用いた「番地割り」のもと, これらの元の「番地」は, それぞれ,

$$V_2 \ni D(\mathbf{1}) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$V_2 \ni D(\mathbf{1} - \mathbf{x}) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$V_2 \ni D(\mathbf{2} - \mathbf{2x} + \mathbf{3x^2}) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

となることが分かりますから, 表現行列 $\check{D}$ は,

$$\check{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となることが分かります.

問 2.

(1) 行列 P の行列式行列 P の行列式 $\det P$ を計算してみると,

$$\begin{aligned}
\det P &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} && (\text{ 2 行目+3 行目 } \times 1\text{ }) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} && (\text{ 1 列目で展開 }) \\
&= -1
\end{aligned}$$

となることが分かります．よって, $\det P = -1 \neq 0$ となることが分かりますから, $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底となることが分かります.

(2) 行列 P と単位行列 I を横に並べて, 行に関する同じ基本変形を施すと, 例えば,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目} + 3\text{ 行目} \times 1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{1\text{ 行目} + 2\text{ 行目} \times (-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3\text{ 行目} + 1\text{ 行目} \times (-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ 行目} \leftrightarrow 3\text{ 行目}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

というように変形できることが分かります. したがって,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

となることが分かります.

(3) (2) の結果と「表現行列の変換公式」から, 基底 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ に関する線型写像 f_A の表現行列 A' は,

$$\begin{aligned} A' &= P^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることが分かります.

「線型写像の表現行列の変換公式」については「数学 II 演習 (第 8 回) の略解 : p.24, 5 節」を参照.