A セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 II」
レポート問題 (その 6)

問 1. 2 次式以下の (実数係数の) 多項式全体の集合を,

$$V_2 = \{ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$$

と表わして, $f \in V_2$ に対して,

$$(Df)(x) = (x^2+1)\frac{d^2 f}{dx^2}(x) + (x-1)\frac{df}{dx}(x)$$

という式によって定まる線形写像

$$D = (x^2+1)\frac{d^2}{dx^2} + (x-1)\frac{d}{dx} : V_2 \to V_2$$

を考える. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) 基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する線型写像 D の表現行列 $\hat{D}$ を求めよ.

(2) $\{1, 1-x, 2-2x+3x^2\}$ を基底 $\{1, x, x^2\}$ を用いて表わせ. すなわち,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-x & 2-2x+3x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} P$$

となる 3 行 3 列の行列 P を求めよ.

(3) (2) で求めた行列 P の逆行列を求めよ.

(4) (1), (2), (3) の結果と「表現行列の変換公式」を用いて, 基底 $\{1, 1-x, 2-2x+3x^2\}$ に関する線型写像 D の表現行列 $\check{D}$ を求めよ.

(5) 直接, $D(1), D(1-x), D(2-2x+3x^2)$ を計算することで, 基底 $\{1, 1-x, 2-2x+3x^2\}$ に関する線型写像 D の表現行列 $\check{D}$ を求めよ.

問 2. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

を掛け算することにより定まる線型写像 $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ について考える. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

を考える. このとき, $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底となることを示せ. すなわち,

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とするとき, P は正則行列となることを示せ.

(2) 行列 P の逆行列 P^{-1} を求めよ.

(3) 基底 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ に関する線型写像 f_A の表現行列 A' を求めよ.