

A セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 II」
レポート問題 (その5) の略解

問 1.

- (1) $\{1 + 2x + x^2, 1 + x + 2x^2, 2 + x + 3x^2\}$ は, 基底 $\{1, x, x^2\}$ を用いて,

$$\begin{pmatrix} 1 + 2x + x^2 & 1 + x + 2x^2 & 2 + x + 3x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

というように表わせることが分かります. よって, P は,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

となることが分かります.

- (2) 行列 P の行列式 $\det P$ を計算してみると,

$$\begin{aligned} \det P &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} && (2 \text{ 行目} + 1 \text{ 行目} \times (-2)) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} && (3 \text{ 行目} + 1 \text{ 行目} \times (-1)) \\ &= \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} && (1 \text{ 列目で展開}) \\ &= -1 - (-3) \\ &= 2 \end{aligned}$$

となることが分かります. よって, $\det P = 2 \neq 0$ となることが分かりますから, $\{1 + 2x + x^2, 1 + x + 2x^2, 2 + x + 3x^2\}$ も V_2 の基底となることが分かります.

(3) $\{1 - 2x + x^2, 2 + x - 3x^2, 1 - 3x + 2x^2\}$ は, 基底 $\{1, x, x^2\}$ を用いて,

$$\begin{pmatrix} 1-2x+x^2 & 2+x-3x^2 & 1-3x+2x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

というように表わせることが分かります. よって, Q は,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

となることが分かります.

(4) 行列 Q の行列式 $\det Q$ を計算してみると,

$$\begin{aligned} \det Q &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} && (2 \text{ 行目} + 1 \text{ 行目} \times 2) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} && (3 \text{ 行目} + 1 \text{ 行目} \times (-1)) \\ &= \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} && (1 \text{ 列目で展開}) \\ &= 5 - 5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることが分かります. よって, $\det Q = 0$ となることが分かりますから, $\{1 - 2x + x^2, 2 + x - 3x^2, 1 - 3x + 2x^2\}$ は V_2 の基底とはならないことが分かります.

問 2.

(1) それぞれの有理関数 f_0, f_1, f_2 の分母を,

$$q(x) = (x-1)^2(x-2)$$

に揃えてみると,

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(x-2)}{(x-1)^2(x-2)} \\ &= \frac{-2}{q(x)} + \frac{x}{q(x)} \\ &= (-2)\mathbf{e}_0 + 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)^2(x-2)} \\ &= \frac{x^2 - 3x + 2}{q(x)} \\ &= \frac{2}{q(x)} + \frac{-3x}{q(x)} + \frac{x^2}{q(x)} \\ &= 2\mathbf{e}_0 + (-3)\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{1}{x-2} \\ &= \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)} \\ &= \frac{x^2 - 2x + 1}{q(x)} \\ &= \frac{1}{q(x)} + \frac{-2x}{q(x)} + \frac{x^2}{q(x)} \\ &= 1\mathbf{e}_0 + (-2)\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 \end{aligned} \tag{3}$$

となることが分かります. よって, (1) 式, (2) 式, (3) 式から,

$$\begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

と表わせることが分かりますから,

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

となることが分かります.

(2) 行列 P の行列式 $\det P$ を計算してみると,

$$\begin{aligned}
 \det P &= \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} && (2 \text{ 列目} + 3 \text{ 列目} \times (-1)) \\
 &= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} && (3 \text{ 行目で展開}) \\
 &= 2 - 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

となることが分かります. よって, $\det P = 1 \neq 0$ となることが分かりますから, $\{f_0, f_1, f_2\}$ も V の基底となることが分かります.

(3) いま, $\frac{1}{(x-1)^2}$ の $x = 2$ のまわりでの Taylor 展開が,

$$\frac{1}{(x-1)^2} = 1 + \cdots$$

となことに注意すると,

$$\begin{aligned}
 e_0 &= \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} \\
 &= \frac{\frac{1}{(x-1)^2}}{(x-2)} \\
 &= \frac{1}{(x-2)} + \cdots
 \end{aligned}$$

となることが分かりますから, e_0 の特異点 $x = 2$ における特異部分 $s_2(x)$ は,

$$s_2(x) = \frac{1}{(x-2)}$$

となることが分かります. そこで, e_0 から $s_2(x)$ を引き算してみると,

$$\begin{aligned}
 e_0 - s_2(x) &= \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} - \frac{1}{(x-2)} \\
 &= \frac{1 - (x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2(x-2)} \\
&= \frac{-x(x-2)}{(x-1)^2(x-2)} \\
&= \frac{-x}{(x-1)^2} \\
&= \frac{-(x-1) - 1}{(x-1)^2} \\
&= \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{x-1}
\end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_0 &= \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{x-1} + s_2(x) \\
&= \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{(x-2)}
\end{aligned} \tag{5}$$

となることが分かります. よって, (5) 式から,

$$\mathbf{e}_0 = (-1)\mathbf{f}_0 + (-1)\mathbf{f}_1 + 1\mathbf{f}_2 \tag{6}$$

と表わせることが分かります.

全く同様に, $\frac{x}{(x-1)^2}$ の $x=2$ のまわりでの Taylor 展開が,

$$\frac{x}{(x-1)^2} = 2 + \dots$$

となることに注意すると,

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \frac{x}{(x-1)^2(x-2)} \\
&= \frac{\frac{x}{(x-1)^2}}{(x-2)} \\
&= \frac{2}{(x-2)} + \dots
\end{aligned}$$

となることが分かりますから, $\mathbf{e}_1$ の特異点 $x=2$ における特異部分 $s_2(x)$ は,

$$s_2(x) = \frac{2}{(x-2)}$$

となることが分かります. そこで, $\mathbf{e}_1$ から $s_2(x)$ を引き算してみると,

$$\mathbf{e}_1 - s_2(x) = \frac{x}{(x-1)^2(x-2)} - \frac{2}{(x-2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x - 2(x - 1)^2}{(x - 1)^2(x - 2)} \\
&= \frac{-2x^2 + 5x - 2}{(x - 1)^2(x - 2)} \\
&= \frac{-(2x^2 - 5x + 2)}{(x - 1)^2(x - 2)} \\
&= \frac{-(2x - 1)(x - 2)}{(x - 1)^2(x - 2)} \\
&= \frac{-2x + 1}{(x - 1)^2} \\
&= \frac{-2(x - 1) - 1}{(x - 1)^2} \\
&= \frac{-1}{(x - 1)^2} + \frac{-2}{x - 1}
\end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \frac{-1}{(x - 1)^2} + \frac{-2}{x - 1} + s_2(x) \\
&= \frac{-1}{(x - 1)^2} + \frac{-2}{x - 1} + \frac{2}{(x - 2)}
\end{aligned} \tag{7}$$

となることが分かります. よって, (7) 式から,

$$\mathbf{e}_1 = (-1)\mathbf{f}_0 + (-2)\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2 \tag{8}$$

と表わせることが分かります.

さらに, $\frac{x^2}{(x-1)^2}$ の $x = 2$ のまわりでの Taylor 展開が,

$$\frac{x^2}{(x - 1)^2} = 4 + \cdots$$

となることに注意すると,

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_2 &= \frac{x^2}{(x - 1)^2(x - 2)} \\
&= \frac{\frac{x^2}{(x-1)^2}}{(x - 2)} \\
&= \frac{4}{(x - 2)} + \cdots
\end{aligned}$$

となることが分かりますから, $\mathbf{e}_2$ の特異点 $x = 2$ における特異部分 $s_2(x)$ は,

$$s_2(x) = \frac{4}{(x - 2)}$$

となることが分かります. そこで, $\mathbf{e}_2$ から $s_2(x)$ を引き算してみると,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_2 - s_2(x) &= \frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)} - \frac{4}{(x-2)} \\
 &= \frac{x^2 - 4(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)} \\
 &= \frac{-3x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2(x-2)} \\
 &= \frac{-(3x^2 - 8x + 4)}{(x-1)^2(x-2)} \\
 &= \frac{-(3x-2)(x-2)}{(x-1)^2(x-2)} \\
 &= \frac{-3x+2}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{-3(x-1)-1}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-3}{x-1}
 \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_2 &= \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-3}{x-1} + s_2(x) \\
 &= \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-3}{x-1} + \frac{4}{(x-2)}
 \end{aligned} \tag{9}$$

となることが分かります. よって, (9) 式から,

$$\mathbf{e}_2 = (-1)\mathbf{f}_0 + (-3)\mathbf{f}_1 + 4\mathbf{f}_2 \tag{10}$$

と表わせることが分かります. したがって, (6) 式, (8) 式, (10) 式から,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_0 & \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

と表わせることが分かりますから,

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{11}$$

となることが分かります.

(4) (1), (2) で求めた (4) 式, (11) 式で与えられる行列 P, Q に対して, それらの積 PQ を計算してみると,

$$\begin{aligned} PQ &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることが分かります.

「線型空間に異なる基底がどれだけ存在するか」ということについては, 「数学 II 演習 (第 8 回) の略解: p.16, 4 節」を参照. また, 「有理関数の部分分数展開」については, 「数学 IB 演習 (第 8 回) の略解: p.4, 4 節; p.7, 5 節; p.9, 6 節」を参照.