A セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 II」
レポート問題 (その 5)

問 1. 2 次式以下の (実数係数の) 多項式全体の集合を,

$$V_2 = \{ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$$

と表わす. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\{1+2x+x^2, 1+x+2x^2, 2+x+3x^2\}$ を基底 $\{1, x, x^2\}$ を用いて表わせ. すなわち,

$$\begin{pmatrix} 1+2x+x^2 & 1+x+2x^2 & 2+x+3x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} P$$

となる 3 行 3 列の行列 P を求めよ.

(2) $\det P$ を計算することで, $\{1+2x+x^2, 1+x+2x^2, 2+x+3x^2\}$ も V_2 の基底となることを示せ.

(3) $\{1-2x+x^2, 2+x-3x^2, 1-3x+2x^2\}$ を基底 $\{1, x, x^2\}$ を用いて表わせ. すなわち,

$$\begin{pmatrix} 1-2x+x^2 & 2+x-3x^2 & 1-3x+2x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} Q$$

となる 3 行 3 列の行列 Q を求めよ.

(4) $\det Q$ を計算することで, $\{1-2x+x^2, 2+x-3x^2, 1-3x+2x^2\}$ は V_2 の基底とはならないことを示せ.

問 2.

$$V = \left\{ f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{(x-1)^2(x-2)} \;\middle|\; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

とする. すなわち, V は分母が,

$$q(x) = (x-1)^2(x-2)$$

という決まった多項式であり, 分子が二次式

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

であるような有理関数 $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ 全体の集合である. いま,

$$\mathbf{e}_0 = \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}, \ \mathbf{e}_1 = \frac{x}{(x-1)^2(x-2)}, \ \mathbf{e}_2 = \frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)} \ \in V$$

とすると, $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ は線型空間 V の基底となる. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) V の元 $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in V$ を,

$$\mathbf{f}_0 = \frac{1}{(x-1)^2},\ \mathbf{f}_1 = \frac{1}{x-1},\ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{x-2}\ \in V$$

と定める. このとき, $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ を基底 $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ を用いて表わせ. すなわち,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_0 & \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} P$$

となる 3 行 3 列の行列 P を求めよ.

(2) $\det P$ を計算することで, $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ も V の基底となることを示せ.

(3) $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ というそれぞれの有理関数に対して, 部分分数展開を求めることにより, $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を基底 $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ を用いて表わせ. すなわち,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_0 & \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} Q$$

となる 3 行 3 列の行列 Q を求めよ.

(4) (1), (2) で求めた行列 P, Q に対して, それらの積 PQ を計算して,

$$PQ = I$$

となることを確かめよ.