A セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 II」
レポート問題 (その 4) の略解

問 1.

(1) まず, (イ) という条件について考えてみます. すると, 勝手な元 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して,

$$
\begin{aligned}
(f+g)(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) + g(\mathbf{u}+\mathbf{v}) && (\ f+g \text{ の定義より }) \\
&= \{f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})\} + \{g(\mathbf{u}) + g(\mathbf{v})\} && (\ f, g \in \mathrm{Hom}(V, W) \text{ より }) \\
&= \{f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u})\} + \{f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v})\} \\
&= (f+g)(\mathbf{u}) + (f+g)(\mathbf{v}) && (\ f+g \text{ の定義より })
\end{aligned}
$$

となることが分かります. よって, (イ) という条件が満たされることが分かります.

次に, (ロ) という条件について考えてみることにします. すると, 勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ と勝手な実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して,

$$
\begin{aligned}
(f+g)(\alpha\mathbf{u}) &= f(\alpha\mathbf{u}) + g(\alpha\mathbf{u}) && (\ f+g \text{ の定義より }) \\
&= \alpha \cdot f(\mathbf{u}) + \alpha \cdot g(\mathbf{u}) && (\ f, g \in \mathrm{Hom}(V, W) \text{ より }) \\
&= \alpha \cdot \{f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u})\} \\
&= \alpha \cdot (f+g)(\mathbf{u}) && (\ f+g \text{ の定義より })
\end{aligned}
$$

となることが分かります. よって, (ロ) という条件も満たされることが分かります.

以上より, (イ), (ロ) という二つの条件が満たされることが分かりましたから, $f+g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ となることが分かります.

(2) (1) と同様に, $cf \in \mathrm{Hom}(V, W)$ となることを示すためには,

(イ) 勝手な元 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して,

$$(cf)(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (cf)(\mathbf{u}) + (cf)(\mathbf{v})$$

となる.

(ロ) 勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ と勝手な実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して,

$$(cf)(\alpha\mathbf{u}) = \alpha \cdot (cf)(\mathbf{u})$$

となる.

という二つの条件が満たされることを確かめればよいということになります.

そこで, まず, (イ) という条件について考えてみます. すると, 勝手な元 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して,

$$\begin{aligned}(cf)(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= c \cdot f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) && (\ cf \text{ の定義より}) \\ &= c \cdot \{f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})\} && (\ f \in \mathrm{Hom}(V, W) \text{ より}) \\ &= c \cdot f(\mathbf{u}) + c \cdot f(\mathbf{v}) && \\ &= (cf)(\mathbf{u}) + (cf)(\mathbf{v}) && (\ cf \text{ の定義より})\end{aligned}$$

となることが分かります. よって, (イ) という条件が満たされることが分かります.

次に, (ロ) という条件について考えてみることにします. すると, 勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ と勝手な実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned}(cf)(\alpha\mathbf{u}) &= c \cdot f(\alpha\mathbf{u}) && (\ cf \text{ の定義より}) \\ &= c \cdot \alpha \cdot f(\mathbf{u}) && (\ f \in \mathrm{Hom}(V, W) \text{ より}) \\ &= \alpha \cdot \{c \cdot f(\mathbf{u})\} && \\ &= \alpha \cdot (cf)(\mathbf{u}) && (\ cf \text{ の定義より})\end{aligned}$$

となることが分かります. よって, (ロ) という条件も満たされることが分かります.

以上より, (イ), (ロ) という二つの条件が満たされることが分かりましたから, $cf \in \mathrm{Hom}(V, W)$ となることが分かります.

(3) 上と同様に, $f \circ g \in \mathrm{Hom}(U, W)$ となることを示すためには,

(イ) 勝手な元 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ に対して,

$$(f \circ g)(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (f \circ g)(\mathbf{u}) + (f \circ g)(\mathbf{v})$$

となる.

(ロ) 勝手な元 $\mathbf{u} \in U$ と勝手な実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して,

$$(f \circ g)(\alpha\mathbf{u}) = \alpha \cdot (f \circ g)(\mathbf{u})$$

となる.

という二つの条件が満たされることを確かめればよいということになります.

そこで, まず, (イ) という条件について考えてみます. すると, 勝手な元 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して,

$$(f \circ g)(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(g(\mathbf{u}+\mathbf{v})) \qquad (\ f \circ g \text{ の定義より})$$

$$
\begin{aligned}
&= f(g(\mathbf{u}) + g(\mathbf{v}))\} && (\, g \in \mathrm{Hom}(U,V) \text{ より }) \\
&= f(g(\mathbf{u})) + f(g(\mathbf{v})) && (\, f \in \mathrm{Hom}(V,W) \text{ より }) \\
&= (f \circ g)(\mathbf{u}) + (f \circ g)(\mathbf{v}) && (\, f \circ g \text{ の定義より })
\end{aligned}
$$

となることが分かります. よって, (イ) という条件が満たされることが分かります.

次に, (ロ) という条件について考えてみることにします. すると, 勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ と勝手な実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して,

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(\alpha \mathbf{u}) &= f(g(\alpha \mathbf{u})) && (\, f \circ g \text{ の定義より }) \\
&= f(\alpha \cdot g(\mathbf{u})) && (\, g \in \mathrm{Hom}(U,V) \text{ より }) \\
&= \alpha \cdot f(g(\mathbf{u})) && (\, f \in \mathrm{Hom}(V,W) \text{ より }) \\
&= \alpha \cdot (f \circ g)(\mathbf{u}) && (\, f \circ g \text{ の定義より })
\end{aligned}
$$

となることが分かります. よって, (ロ) という条件も満たされることが分かります.

以上より, (イ), (ロ) という二つの条件が満たされることが分かりましたから, $f \circ g \in \mathrm{Hom}(U,W)$ となることが分かります.

問 2.

(1) 基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する線型写像 $D : V_2 \to V_2$ の表現行列 $\hat{D}$ を求めるには,

(イ) 基底の元の行き先 $D(\mathbf{1}), D(\mathbf{x}), D(\mathbf{x^2}) \in V_2$ の「番地」を求める.
($\Longrightarrow$ これらの「番地」を並べたものが表現行列 $\hat{D}$ になる.)

(ロ) 基底 $\{1, x, x^2\}$ を用いた「番地割り」$V_2 \cong \mathbb{R}^3$ のもとで,

$$
V_2 \ni \mathbf{f} = a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{x} + a_2\mathbf{x^2} \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3
$$

と対応しているときに, $D(\mathbf{f}) \in V_2$ の「番地」を,

$$
\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}
$$

を用いて表わす.
($\Longrightarrow$ このとき,

$$
V_2 \ni D(\mathbf{f}) \;\longleftrightarrow\; \hat{D} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3
$$

と対応しているはず．)

という二つの方法を考えることができます．表現行列 $\hat{D}$ を求めるためには，どちらの方法を用いても構わないわけですが，皆さんの参考のために，以下では，それぞれの方法を用いて表現行列 $\hat{D}$ を求めると，どのようなことになるのかということを順番に見てみることにします．

そこで，まず，(イ) という方法にもとづいて考えてみます．いま，線型写像 D の定義にもとづいて，$D(\mathbf{1}), D(\mathbf{x}), D(\mathbf{x^2}) \in V_2$ を求めてみると，それぞれ，

$$
\begin{aligned}
D(\mathbf{1}) &= (x-1)\cdot\frac{d}{dx}(1) \\
&= (x-1)\cdot 0 \\
&= 0\mathbf{1} + 0\mathbf{x} + 0\mathbf{x^2} \qquad (1) \\
D(\mathbf{x}) &= (x-1)\cdot\frac{d}{dx}(x) \\
&= (x-1)\cdot 1 \\
&= (-1)\mathbf{1} + 1\mathbf{x} + 0\mathbf{x^2} \qquad (2) \\
D(\mathbf{x^2}) &= (x-1)\cdot\frac{d}{dx}(x^2) \\
&= (x-1)\cdot 2x \\
&= 0\mathbf{1} + (-2)\mathbf{x} + 2\mathbf{x^2} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

となることが分かります．よって，(1) 式，(2) 式，(3) 式から，これらの元の「番地」は，それぞれ，

$$
\begin{aligned}
V_2 \ni D(\mathbf{1}) &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \\
V_2 \ni D(\mathbf{x}) &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \\
V_2 \ni D(\mathbf{x^2}) &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから，表現行列 $\hat{D}$ は，

$$
\hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

となることが分かります.

次に, (ロ) という方法にもとづいて考えてみます. いま,

$$V_2 \ni \mathbf{f} = a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{x} + a_2\mathbf{x^2} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

と対応しているとして, 線型写像 D の定義にもとづいて, $D(\mathbf{f}) \in V_2$ を求めてみると,

$$\begin{aligned} D(\mathbf{f}) &= (x-1)\cdot\frac{d}{dx}(a_0 + a_1x + a_2x^2) \\ &= (x-1)\cdot(a_1 + 2a_2x) \\ &= (-a_1)\mathbf{1} + (a_1 - 2a_2)\mathbf{x} + 2a_2\mathbf{x^2} \end{aligned} \tag{4}$$

となることが分かります. よって, (4) 式から,

$$V_2 \ni D(\mathbf{f}) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -a_1 \\ a_1 - 2a_2 \\ 2a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

と対応することが分かりますから, 表現行列 $\hat{D}$ は,

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となることが分かります.[1]

(2) (1) と同様に, 皆さんの参考のために, 以下では, (イ), (ロ) という二つの方法を用いて, 表現行列 $\check{D}$ を求めてみることにします.

そこで, まず, (イ) という方法にもとづいて考えてみます. いま, 線型写像 D の定義にもとづいて, $D(\mathbf{1}), D((\mathbf{x}-\mathbf{1})), D((\mathbf{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}) \in V_2$ を求めてみると, それぞれ,

$$\begin{aligned} D(\mathbf{1}) &= (x-1)\cdot\frac{d}{dx}(1) \\ &= (x-1)\cdot 0 \\ &= 0\mathbf{1} + 0(\mathbf{x}-\mathbf{1}) + 0(\mathbf{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}} \end{aligned} \tag{5}$$

$$D((\mathbf{x}-\mathbf{1})) = (x-1)\cdot\frac{d}{dx}(x-1)$$

[1] もちろん, これは, (イ) という方法にもとづいて求めた表現行列 $\hat{D}$ と同じものです.

$$
\begin{aligned}
&= (x-1)\cdot 1 \\
&= 0\mathbf{1} + 1(\mathbf{x}-\mathbf{1}) + 0(\mathbf{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}} && (6) \\
D((\mathbf{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}) &= (x-1)\cdot \frac{d}{dx}((x-1)^2) \\
&= (x-1)\cdot 2(x-1) \\
&= 0\mathbf{1} + 0(\mathbf{x}-\mathbf{1}) + 2(\mathbf{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}} && (7)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. よって, (5) 式, (6) 式, (7) 式から, これらの元の「番地」は, それぞれ,

$$
\begin{aligned}
V_2 \ni D(\mathbf{1}) \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \\
V_2 \ni D((\mathbf{x}-\mathbf{1})) \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \\
V_2 \ni D((\mathbf{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}) \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから, 表現行列 $\check{D}$ は,

$$
\check{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

となることが分かります.

次に, (ロ) という方法にもとづいて考えてみます. いま,

$$
V_2 \ni \mathbf{f} = b_0\mathbf{1} + b_1(\mathbf{x}-\mathbf{1}) + b_2(\mathbf{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}} \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3
$$

と対応しているとして, 線型写像 D の定義にもとづいて, $D(\mathbf{f}) \in V_2$ を求めてみると,

$$
\begin{aligned}
D(\mathbf{f}) &= (x-1)\cdot \frac{d}{dx}(b_0 + b_1(x-1) + b_2(x-1)^2) \\
&= (x-1)\cdot (b_1 + 2b_2(x-1)) \\
&= 0\mathbf{1} + b_1(\mathbf{x}-\mathbf{1}) + 2b_2(\mathbf{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}} && (8)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. よって, (4) 式から,

$$V_2 \ni D(\mathbf{f}) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ 2b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

と対応することが分かりますから, 表現行列 $\check{D}$ は,

$$\check{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となることが分かります.[2]

「線型写像の表現行列」については,「数学 II 演習 (第 6 回) の略解 : p.55, 16 節」を参照. また,「線型空間や線型写像の代表例」については,「数学 II 演習 (第 7 回) の略解 : p.8, 2 節」を参照.

[2] もちろん, これは, (イ) という方法にもとづいて求めた表現行列 $\check{D}$ と同じものです.