

A セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 II」 レポート問題 (その4)

問 1. ($\mathbb{R}$ 上の) 線型空間 V, W に対して, V から W への線型写像全体の集合を,

$$\text{Hom}(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ は線型写像} \}$$

と表わすことにする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $f, g \in \text{Hom}(V, W)$ のとき, $f + g \in \text{Hom}(V, W)$ となることを示せ. すなわち,

(イ) 勝手な元 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して,

$$(f + g)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (f + g)(\mathbf{u}) + (f + g)(\mathbf{v})$$

となる.

(ロ) 勝手な元 $\mathbf{u} \in V$ と勝手な実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して,

$$(f + g)(\alpha \mathbf{u}) = \alpha \cdot (f + g)(\mathbf{u})$$

となる.

という二つの条件が満たされることを示せ. ただし, それぞれの条件を確認するに当たって, 例えば,

$$(f + g)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + g(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \quad (f + g \text{ の定義より})$$

というように, それぞれの等号が成り立つ根拠も一緒に書き添えながら議論を進めてみよ.

(2) (1) と同様にして, $f \in \text{Hom}(V, W)$, $c \in \mathbb{R}$ のとき, $cf \in \text{Hom}(V, W)$ となることを示せ.

(3) さらに, U も ($\mathbb{R}$ 上の) 線型空間とすると, 上と同様にして,

$$f \in \text{Hom}(V, W), g \in \text{Hom}(U, V) \implies f \circ g \in \text{Hom}(U, W)$$

となることを示せ.

♣ 裏もあります.

問 2. 2 次式以下の (実数係数の) 多項式全体の集合を,

$$V_2 = \{f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$$

と表わすことにして, $f \in V_2$ に対して,

$$D(f)(x) = (x-1)\frac{df}{dx}(x)$$

という式によって定まる線型写像

$$D = (x-1)\frac{d}{dx} : V_2 \rightarrow V_2$$

を考える. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) 基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する線型写像 D の表現行列 $\hat{D}$ を求めよ.
- (2) 基底 $\{1, (x-1), (x-1)^2\}$ に関する線型写像 D の表現行列 $\check{D}$ を求めよ.