

A セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 II」 レポート問題 (その3) の略解

問 1.

- (1) まず, (イ) という条件について考えてみます. すると, 勝手な元 $f, g \in V$ に対して,

$$\begin{aligned} D(f+g) &= \frac{d}{dx}(f+g) \\ &= \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} && (\text{微分の計算規則から}) \\ &= D(f) + D(g) \end{aligned}$$

となることが分かります. よって, (イ) という条件が満たされることが分かります.

次に, (ロ) という条件について考えることにします. すると, 勝手な元 $f \in V$ と勝手な実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} D(af) &= \frac{d}{dx}(af) \\ &= a \frac{df}{dx} && (\text{微分の計算規則から}) \\ &= aD(f) \end{aligned}$$

となることが分かります. よって, (ロ) という条件も満たされることが分かります.

以上より, (イ), (ロ) という二つの条件が満たされることが分かりましたから, $D: V \rightarrow V$ は線型写像となることが分かります.

- (2) (1) と同様に, まず, (イ) という条件について考えてみます. すると, 勝手な元 $f, g \in V$ に対して,

$$\begin{aligned} I(f+g) &= \int_0^1 (f(x) + g(x))dx \\ &= \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx && (\text{積分の計算規則から}) \\ &= I(f) + I(g) \end{aligned}$$

となることが分かります. よって, (イ) という条件が満たされることが分かります.

次に, (ロ) という条件について考えてみることにします. すると, 勝手な元 $f \in V$ と勝手な実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} I(af) &= \int_0^1 af(x)dx \\ &= a \int_0^1 f(x)dx \quad (\text{積分の計算規則から}) \\ &= aI(f) \end{aligned}$$

となることが分かります. よって, (ロ) という条件も満たされることが分かります.

以上より, (イ), (ロ) という二つの条件が満たされることが分かりましたから, $I: V \rightarrow \mathbb{R}$ は線型写像となることが分かります.

問 2.

(1) T_θ が線型写像であることを示すためには,

(イ) 勝手な二つのベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$T_\theta(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T_\theta(\mathbf{u}) + T_\theta(\mathbf{v})$$

となる.

(ロ) 勝手なベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ と, 勝手な実数 $c \in \mathbb{R}$ に対して,

$$T_\theta(c\mathbf{u}) = c \cdot T_\theta(\mathbf{u})$$

となる.

という二つの条件が成り立つことを確かめればよいということになります.

そこで, まず, (イ) という条件について考えてみます. そのために, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ というベクトルが, 勝手にふたつ与えられているとして, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}$ という三つのベクトルを直線 l_θ に関して折り返したときの様子を考えてみます (図 1 を参照). このとき, 図 1 の右の図に現われる $\mathbf{w}$ というベクトルについて考えてみると, 「 $\mathbf{w}$ は $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ を直線 l_θ に関して折り返すことによって得られる」と考えることができますから,

$$\mathbf{w} = T_\theta(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \tag{1}$$

と表わせることが分かります. 一方, 図 1 の右の図だけに注目すると, 「 $\mathbf{w}$ は $T_\theta(\mathbf{u})$ と $T_\theta(\mathbf{v})$ の和である」とも考えることができますから,

$$\mathbf{w} = T_\theta(\mathbf{u}) + T_\theta(\mathbf{v}) \tag{2}$$

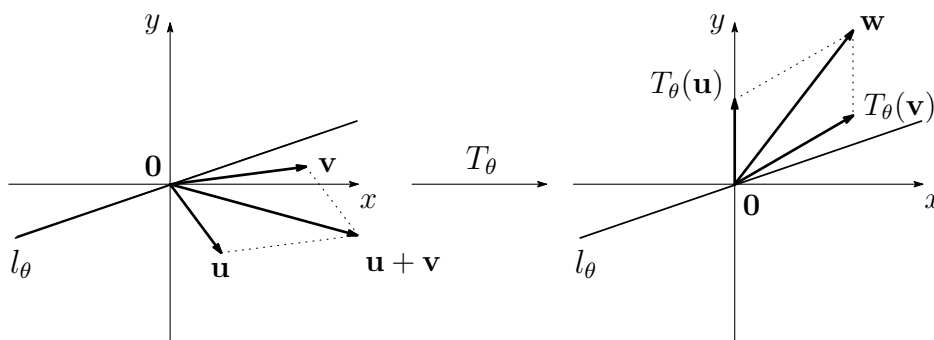


図 1: 直線 l_θ に関する折り返しの様子 (その 1).

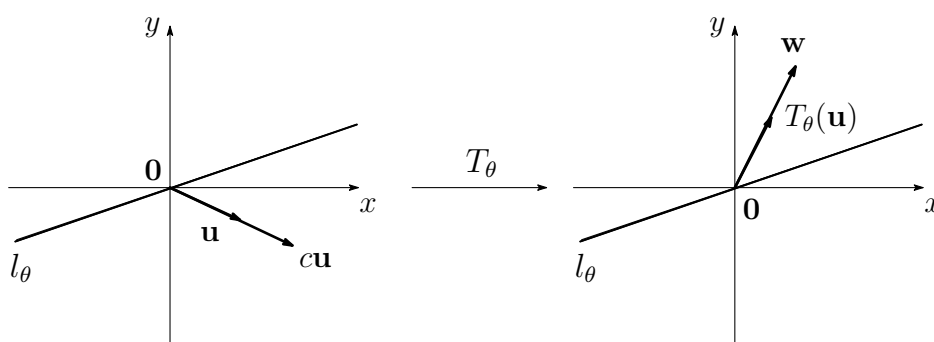


図 2: 直線 l_θ に関する折り返しの様子 (その 2).

とも表わせることが分かります. よって, (1) 式, (2) 式から,

$$T_\theta(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T_\theta(\mathbf{u}) + T_\theta(\mathbf{v})$$

となることが分かりますから, (イ) という条件が成り立つことが分かります.

全く同様に, ベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ と実数 $c \in \mathbb{R}$ が, 勝手にひとつずつ与えられているとして, $\mathbf{u}$ と $c\mathbf{u}$ というベクトルを直線 l_θ に関して折り返したときの様子を考えてみます (図 2 を参照). このとき, 前と同様に, 図 2 の右の図に現われる $\mathbf{w}$ というベクトルについて考えてみると, 「 $\mathbf{w}$ は $c\mathbf{u}$ を直線 l_θ に関して折り返すことによって得られる」と考えることができますから,

$$\mathbf{w} = T_\theta(c\mathbf{u}) \quad (3)$$

と表わせることが分かります. 一方, 図 2 の右の図だけに注目すると, 「 $\mathbf{w}$ は $T_\theta(\mathbf{u})$ を c 倍したものである」とも考えることができますから,

$$\mathbf{w} = c \cdot T_\theta(\mathbf{u}) \quad (4)$$

とも表わせることが分かります. よって, (3) 式, (4) 式から,

$$T_\theta(c\mathbf{u}) = c \cdot T_\theta(\mathbf{u})$$

となることが分かりますから、(口) という条件も成り立つことが分かります。

以上から、(イ)、(口) という二つの条件が成り立つことが分かりましたから、 $T_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は線型写像であることが分かります。

(2) いま、ベクトル

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

を、勝手にひとつ取ってきて、

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

というように分解してみます。このとき、(イ)、(口) という二つの性質を用いると、 $T_\theta(\mathbf{u})$ は、

$$\begin{aligned} T_\theta(\mathbf{u}) &= T_\theta \left(x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= T_\theta \left(x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + T_\theta \left(y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad ((\text{イ}) \text{ より }) \\ &= x \cdot T_\theta \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + y \cdot T_\theta \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad ((\text{口}) \text{ より }) \quad (5) \end{aligned}$$

というように表わせることが分かります。よって、(5) 式から、 $\mathbb{R}^2$ の勝手なベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ を直線 l_θ に関して折り返した行き先 $T_\theta(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^2$ の「番地」を求めるためには、

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

として、 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^2$ という特別なベクトルを折り返した行き先

$$T_\theta(\mathbf{e}_1), T_\theta(\mathbf{e}_2) \in \mathbb{R}^2$$

の「番地」を求めればよいということが分かります。そこで、図を描いて、これら二つのベクトルの行き先 $T_\theta(\mathbf{e}_1), T_\theta(\mathbf{e}_2)$ の「番地」を求めてみると、

$$T_\theta(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix}, T_\theta(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} \sin 2\theta \\ -\cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (6)$$

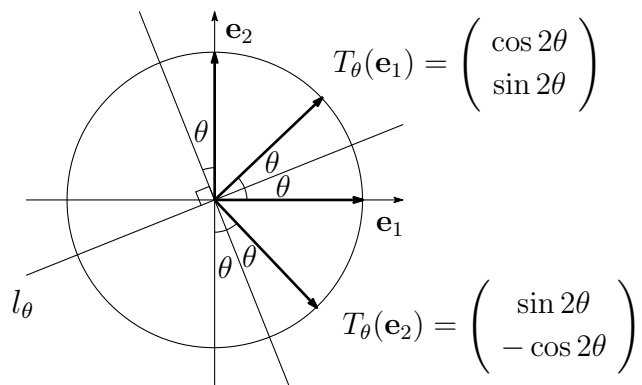


図 3: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を直線 l_θ に関して折り返したときの様子.

となることが分かります (図 3 参照). よって, (5) 式, (6) 式から,

$$\begin{aligned}
 T_\theta(\mathbf{u}) &= x \cdot T_\theta(\mathbf{e}_1) + y \cdot T_\theta(\mathbf{e}_2) \\
 &= x \cdot \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} \sin 2\theta \\ -\cos 2\theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} x \cos 2\theta + y \sin 2\theta \\ x \sin 2\theta - y \cos 2\theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

と表わせることが分かります. したがって, 線型写像 T_θ は,

$$\hat{T}_\theta = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

として,

$$T_\theta(\mathbf{u}) = \hat{T}_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表わせることが分かります.

「線型写像」については, 「数学 II 演習 (第 6 回) の略解 : p.47, 14 節」を参照.
また, 「数ベクトル空間の間の線型写像」については, 「数学 II 演習 (第 6 回) の略解 : p.51, 15 節」を参照.