# A セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 II」
# レポート問題 (その３)

**問 1.**

$$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ は何度でも微分できる関数 } \}$$

とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $f \in V$ に対して,

$$D(f) = \frac{df}{dx}$$

という式によって,

$$D : V \to V$$

を定めると, $D$ は線型写像となることを示せ. すなわち,

(イ) 勝手な元 $f, g \in V$ に対して,

$$D(f+g) = D(f) + D(g)$$

となる.

(ロ) 勝手な元 $f \in V$ と勝手な実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して,

$$D(af) = aD(f)$$

となる.

という二つの条件が満たされることを確かめよ.

(2) $f \in V$ に対して,

$$I(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

という式によって,

$$I : V \to \mathbb{R}$$

を定めると, $I$ は線型写像となることを示せ.

♣ 裏もあります.

**問 2.** $\theta \in \mathbb{R}$ として, $\mathbb{R}^2$ 内の原点を通り, 傾きが $\tan\theta$ の直線を $l_\theta$ とする. すなわち, $l_\theta$ は, 原点を中心として, $x$ 軸を半時計回りに $\theta$ だけ回転させることによって得られる直線である. また, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ に対して, ベクトル $\mathbf{u}$ を直線 $l_\theta$ に関して折り返すことにより得られるベクトルを $T_\theta(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^2$ と表わす. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ に $T_\theta(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^2$ を対応させることによって得られる写像

$$T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

は線型写像になることを示せ.

(2) 線型写像 $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を表わす行列を求めよ. すなわち,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

に対して,

$$T_\theta(\mathbf{u}) = \hat{T}_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表わせるような 2 行 2 列の行列 $\hat{T}_\theta$ を求めよ.