

A セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 II」 レポート問題 (その 2) の略解

問 1.

記号の意味や説明されている概念の意味が理解しやすいように、以下では、多項式 $f \in V_2$ を線型空間 V_2 の点だと考えているときには、「 f 」というように「太文字」で表わして、実数 $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ などと区別して表わすことにします。ただし、多項式 f の $x \in \mathbb{R}$ での「値」を考えているときには、 $f(x) \in \mathbb{R}$ を数であると考えて、「 $f(x)$ 」ではなくて、単に、「 $f(x)$ 」と表わすことにします。

(1) $\{1, x, x^2\}$ が V_2 の基底であることを確かめるためには、

(イ) 勝手な元 $f \in V_2$ に対して、

$$f = a_0 \mathbf{1} + a_1 x + a_2 x^2$$

となる実数 $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ が存在する。

(ロ) $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ として、

$$0 = a_0 \mathbf{1} + a_1 x + a_2 x^2 \implies a_0 = a_1 = a_2 = 0$$

となる。

という二つの条件が満たされることを示せばよいということになります。

そこで、まず、(イ) という条件について考えてみます。いま、二次式以下の多項式とは、正に、 $1, x, x^2$ という関数の一次結合で表わせるような関数であると定義しましたから、 V_2 の定義により、(イ) という条件は自動的に満たされることが分かります。

次に、(ロ) という条件について考えてみます。いま、 $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ として、

$$0 = a_0 \mathbf{1} + a_1 x + a_2 x^2 \tag{1}$$

であると仮定してみます。このとき、(1) 式の左辺の 0 とは、線型空間 V_2 の原点のことですから、すべての実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して、 $0 \in \mathbb{R}$ を対応させる「零関数」を表わしていることに注意します。したがって、(ロ) という条件を確かめるには、 $f \in V_2$ を、

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \tag{2}$$

と表わしたときに、関数 f が「零関数」であれば、

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0$$

となることが確かめられればよいということになります.

そこで, いま, 関数 f が 0 という定数関数であると仮定してみます. すなわち, 勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(x) = 0$$

となると仮定してみます. このとき, 勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = 0$$

となることが分かりますから, 特に, $x = 0$ として,

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0 \quad (3)$$

となることが分かります. 一方, (2) 式の両辺を何度か微分してから, $x = 0$ を代入してみると,

$$\begin{cases} f(0) = a_0 \\ f'(0) = a_1 \\ f''(0) = 2a_2 \end{cases} \quad (4)$$

となることが分かりますから, (3) 式, (4) 式から,

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0$$

となることが分かります.¹ よって, (口) という条件も満たされることが分かります.

以上から, (イ), (口) という二つの条件が満たされることが分かりましたから, $\{1, x, x^2\}$ は, V_2 の基底になることが分かります.

(2) (1) と同様に, $\{1, (x-1), (x-1)^2\}$ が V_2 の基底であることを確かめるためには,

(イ) 勝手な元 $f \in V_2$ に対して,

$$f = b_0 1 + b_1(x-1) + b_2(x-1)^2$$

となる実数 $b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ が存在する.

¹ 上のような議論でなくとも, 例えば, $x \in \mathbb{R}$ として, $x = 0, 1, -1$ などの具体的な数を取ってきて,

$$f(0) = f(1) = f(-1) = 0$$

となることから, $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ となることを結論されても構いません.

(ロ) $b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ として,

$$0 = b_0 \mathbf{1} + b_1(\mathbf{x} - 1) + b_2(\mathbf{x} - 1)^2 \implies b_0 = b_1 = b_2 = 0$$

となる.

という二つの条件が満たされることを示せばよいということになります.

そこで, まず, (イ) の条件について考えてみます. いま, $f \in V_2$ を, 勝手にひとつ取ってきたとします. このとき, f は,

$$\begin{aligned} f &= a_0 + a_1x + a_2x^2 \\ &= a_0 + a_1\{(x-1) + 1\} + a_2\{(x-1) + 1\}^2 \\ &= (a_0 + a_1 + a_2) + (a_1 + 2a_2)(x-1) + a_2(x-1)^2 \\ &= (a_0 + a_1 + a_2)\mathbf{1} + (a_1 + 2a_2)(\mathbf{x} - \mathbf{1}) + a_2(\mathbf{x} - \mathbf{1})^2 \end{aligned}$$

というように表わせることが分かりますから,

$$\begin{cases} b_0 = a_0 + a_1 + a_2 \\ b_1 = a_1 + 2a_2 \\ b_2 = a_2 \end{cases}$$

として, (イ) という条件が満たされることが分かります.

次に, (ロ) という条件について考えてみます. そこで, いま, $b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ として,

$$0 = b_0 \mathbf{1} + b_1(\mathbf{x} - 1) + b_2(\mathbf{x} - 1)^2 \quad (5)$$

であると仮定してみます. すると, (1) と同様に, (5) 式は, 勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$0 = b_0 + b_1(x-1) + b_2(x-1)^2 \quad (6)$$

となることを意味していますから, (6) 式の両辺を何度か微分してから, $x = 1$ とすることで,

$$b_0 = b_1 = b_2 = 0$$

となることが分かります. よって, (ロ) という条件も満たされることが分かります.

以上から, (イ), (ロ) という二つの条件が満たされることが分かりましたから, $\{1, (\mathbf{x} - 1), (\mathbf{x} - 1)^2\}$ も, V_2 の基底になることが分かります.

問 2.

(1) いま,

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, \quad (n \geq 3) \quad (7)$$

であるとして、このとき、(7) 式を,

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2}, \quad (n \geq 3) \quad (8)$$

というように書き直してから、(8) 式を繰り返して用いることで、

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= a_{n-1} - a_{n-2} \\ &= a_{n-2} - a_{n-3} \\ &= \dots \\ &= a_2 - a_1 \end{aligned} \quad (9)$$

となることが分かります。そこで、(9) 式の左辺に現われる n を $n \rightsquigarrow k$ と書き直すことで、

$$a_k - a_{k-1} = a_2 - a_1 \quad (10)$$

と表わしてから、(10) 式の両辺を、 k について、2 から n まで和を取ってみると、

$$a_n - a_1 = (n-1)(a_2 - a_1) \quad (11)$$

となることが分かります。よって、(11) 式から、数列 $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ の一般項は、

$$a_n = a_1 + (n-1)(a_2 - a_1) \quad (12)$$

と表わせることが分かります。

(2) (12) 式より、数列 $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ は、例えば、

$$\begin{aligned} \{a_n\}_{n=1,2,\dots} &= \{a_1 + (n-1)(a_2 - a_1)\}_{n=1,2,\dots} \\ &= \{a_1 + (a_2 - a_1)(n-1)\}_{n=1,2,\dots} \\ &= \{a_1\}_{n=1,2,\dots} + \{(a_2 - a_1)(n-1)\}_{n=1,2,\dots} \\ &= a_1 \cdot \{1\}_{n=1,2,\dots} + (a_2 - a_1) \cdot \{(n-1)\}_{n=1,2,\dots} \\ &= a_1 \cdot \{1, 1, 1, \dots\} + (a_2 - a_1) \cdot \{0, 1, 2, \dots\} \end{aligned} \quad (13)$$

というように表わせることが分かります。

(3) (2) の結果から、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \{1\}_{n=1,2,\dots} \\ &= \{1, 1, 1, \dots\} \\ \mathbf{e}_2 &= \{n-1\}_{n=1,2,\dots} \\ &= \{0, 1, 2, \dots\} \end{aligned}$$

という式により, $e_1, e_2 \in V$ を定めてみます. このとき, $\{e_1, e_2\}$ が V の基底となることを確かめるためには,

(イ) 勝手な元 $a \in V$ に対して,

$$a = \alpha e_1 + \beta e_2$$

となる実数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ が存在する.

(ロ) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ として,

$$0 = \alpha e_1 + \beta e_2 \implies \alpha = \beta = 0$$

となる.

という二つの条件が満たされることを示せばよいということになります.

そこで, まず, (イ) の条件について考えてみます. いま, (13) 式から, 勝手な元 $a \in V$ は,

$$a = a_1 e_1 + (a_2 - a_1) e_2$$

というように表わせることが分かりますから,

$$\alpha = a_1, \beta = a_2 - a_1$$

として, (イ) の条件が満たされることが分かります.

次に, (ロ) の条件について考えてみます. そこで, いま, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ として,

$$0 = \alpha e_1 + \beta e_2 \tag{14}$$

となると仮定してみます. このとき, (14) 式の左辺は,

$$0 = \{0, 0, 0, \dots\}$$

という「零数列」を表わしていることに注意します. 一方, (14) 式の右辺は,

$$\begin{aligned} \alpha e_1 + \beta e_2 &= \alpha \cdot \{1, 1, 1, \dots\} + \beta \cdot \{0, 1, 2, \dots\} \\ &= \{\alpha, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \dots\} \end{aligned}$$

という数列を表わしていますから, (14) 式は, 今の場合,

$$\{0, 0, 0, \dots\} = \{\alpha, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \dots\} \tag{15}$$

という式を表わしていることが分かります. そこで, (15) 式の両辺に現われる数列の最初の二つの項を見比べてみると,

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

となることが分かりますから,

$$\alpha = \beta = 0$$

となることが分かります. よって, (ロ) の条件も満たされることが分かります.

以上から, (イ), (ロ) という二つの条件が満たされることが分かりましたから, $\{e_1, e_2\}$ は V の基底となることが分かります.

「基底を用いた線型空間の座標付け」については, 「数学 II 演習 (第 6 回) の略解 : p.27, 9 節」を参照. また, 「線型代数学の立場から, 定数係数の線型漸化式を満たす数列の一般項を求めること」については, 「数学 II 演習 (第 7 回) の略解 : p.28, 4 節」を参照.