

A セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 II」
レポート問題 (その2)

問 1. 2 次式以下の (実数係数の) 多項式全体の集合を,

$$V_2 = \{f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

と表わすことにする. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) $\{1, x, x^2\}$ は, V_2 の基底になることを示せ.
- (2) $\{1, (x-1), (x-1)^2\}$ も, V_2 の基底になることを示せ.

問 2.

$$V = \{\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1,2,\dots} \mid a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, (n \geq 3)\}$$

とする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) V の元をすべて求めよ. すなわち,

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, (n \geq 3)$$

という漸化式を満たす数列 $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ の一般項を求めよ.

- (2) (1) で求めた数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ を,

$$\{a_n\}_{n=1,2,\dots} = \alpha \cdot \{c_n\}_{n=1,2,\dots} + \beta \cdot \{d_n\}_{n=1,2,\dots}$$

という形に表わしてみよ. ここで, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ は $n \in \mathbb{N}$ によらない定数で, $\{c_n\}_{n=1,2,\dots}, \{d_n\}_{n=1,2,\dots} \in V$ は,

$$\{n-1\}_{n=1,2,\dots} = \{0, 1, 2, \dots\} \in V$$

のように具体的に与えられる V の元を表わすものとする.

- (3) (2) で求めた数列 $\{c_n\}_{n=1,2,\dots}, \{d_n\}_{n=1,2,\dots} \in V$ を,

$$\mathbf{e}_1 = \{c_n\}_{n=1,2,\dots}, \mathbf{e}_2 = \{d_n\}_{n=1,2,\dots}$$

と定めるとき, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ は V の基底となることを示せ.