A セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 II」
レポート問題 (その１) の略解

問 1. $\mathbb{R}^3$ の部分集合 $V \subset \mathbb{R}^3$ が線型部分空間であるとは,

(イ) 勝手なベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$ となる.

(ロ) 勝手なベクトル $\mathbf{u} \in V$ と勝手な実数 $c \in \mathbb{R}$ に対して, $c\mathbf{u} \in V$ となる.

という二つの条件が満たされることでした. そこで, 与えられた $\mathbb{R}^3$ の部分集合 V_1, V_2, V_3 について, 上の条件が満たされるかどうかを確かめてみます.

まず, V_1 について考えてみます. いま, ベクトル

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in V_1$$

を, 勝手に二つ取ってきたとします. すると, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_1$ ですから,

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x' + 2y' + 3z' = 0 \end{cases} \tag{1}$$

となることが分かります. このとき,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$$

となりますが, (1) 式から,

$$\begin{aligned} (x + x') + 2(y + y') + 3(z + z') &= (x + 2y + 3z) + (x' + 2y' + 3z') \\ &= 0 + 0 && \text{((1) 式から)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V_1$$

となることが分かります. さらに, 実数 $c \in \mathbb{R}$ を, 勝手にひとつ取ってくると,

$$c\mathbf{u} = \begin{pmatrix} cx \\ cy \\ cz \end{pmatrix}$$

となりますが, 再び, (1) 式から,

$$\begin{aligned} (cx)+2(cy)+3(cz) &= c\cdot(x+2y+3z) \\ &= c\cdot 0 && (\text{ (1) 式から }) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$c\mathbf{u}\in V_1$$

となることが分かります. 以上から, (イ), (ロ) という二つの条件が満たされることが分かりましたから, V_1 は $\mathbb{R}^3$ の線型部分空間であることが分かります.

次に, V_2 について考えてみます. すると, 例えば,

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\in V_2$$

というベクトルを考えてみると, $\mathbf{u}\in V_2$ となりますが,

$$2\mathbf{u}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\notin V_2$$

となることが分かりますから, (ロ) という条件は成り立たないことが分かります.[1] よって, V_2 は $\mathbb{R}^3$ の線型部分空間ではないことが分かります.

最後に, V_3 について考えてみます. すると, 例えば,

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\in V_3$$

という二つのベクトルを考えると, $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V_3$ となりますが,

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\notin V_3$$

となることが分かりますから, (イ) という条件は成り立たないことが分かります.[2] よって, V_3 は $\mathbb{R}^3$ の線型部分空間ではないことが分かります.

以上から, V_1 だけが $\mathbb{R}^3$ の線型部分空間になり, V_2, V_3 は $\mathbb{R}^3$ の線型部分空間ではないことが分かります.

[1] もちろん, (イ) という条件が成り立たない例を挙げても構いません.
[2] もちろん, (ロ) という条件が成り立たない例を挙げても構いません.

問 2.

(1) V が線型空間になることを示すためには,

(イ) 勝手な元 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ に対して, $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$ となる.

(ロ) 勝手な元 $\mathbf{a} \in V$ と勝手な実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $\alpha\mathbf{a} \in V$ となる.

という二つの条件が満たされることが確かめられればよいということになります.

そこで, まず, (イ) の条件について考えてみることにします. いま, $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$, $\mathbf{b} = \{b_n\}_{n=1,2,\cdots} \in V$ を, 勝手にふたつ取ってきたとします. すると, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ ですから, $n \geq 3$ に対して,

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \\ b_n = 2b_{n-1} - b_{n-2} \end{cases} \tag{2}$$

となることが分かります. このとき,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_n + b_n\}_{n=1,2,\cdots}$$

となりますが, (2) 式から, $n \geq 3$ に対して,

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= (2a_{n-1} - a_{n-2}) + (2b_{n-1} - b_{n-2}) \qquad (\text{ (2) 式から }) \\ &= 2(a_{n-1} + b_{n-1}) - (a_{n-2} + b_{n-2}) \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_n + b_n\}_{n=1,2,\cdots} \in V$$

となることが分かります. よって, (イ) という条件が満たされることが分かります.

次に, (ロ) という条件について考えてみることにします. いま, $\mathbf{a} \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ を, 勝手にひとつずつ取ってきたとします, すると, $\mathbf{a} \in V$ ですから, $n \geq 3$ に対して,

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \tag{3}$$

となることが分かります. このとき,

$$\alpha\mathbf{a} = \{\alpha \cdot a_n\}_{n=1,2,\cdots}$$

となりますが, (3) 式から, $n \geq 3$ に対して,

$$\begin{aligned} \alpha \cdot a_n &= \alpha \cdot (2a_{n-1} - a_{n-2}) \qquad (\text{ (3) 式から }) \\ &= 2(\alpha \cdot a_{n-1}) - (\alpha \cdot a_{n-2}) \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$\alpha\mathbf{a} \in V$$

となることが分かります. よって, (ロ) という条件も満たされることが分かります.

以上より, (イ), (ロ) という二つの条件が満たされることが分かりますから, V は線型空間になることが分かります.

(2) W が線型空間になることを示すためには,

(イ) 勝手な元 $f, g \in W$ に対して, $f + g \in W$ となる.

(ロ) 勝手な元 $f \in W$ と勝手な実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して, $af \in W$ となる.

という二つの条件が満たされることが確かめられればよいということになります.

そこで, まず, (イ) の条件について考えてみることにします. いま, $f, g \in W$ を, 勝手にふたつ取ってきたとします. すると, $f, g \in W$ ですから,

$$\begin{cases} f''(x) = 3f'(x) - 2f(x) \\ g''(x) = 3g'(x) - 2g(x) \end{cases} \tag{4}$$

となることが分かります. このとき, (4) 式から,

$$\begin{aligned} (f+g)''(x) &= f''(x) + g''(x) \\ &= (3f'(x) - 2f(x)) + (3g'(x) - 2g(x)) \qquad (\ (4)\ \text{式から}\ ) \\ &= 3(f'(x) + g'(x)) - 2(f(x) + g(x)) \\ &= 3(f+g)'(x) - 2(f+g)(x) \end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$f + g \in W$$

となることが分かります. よって, (イ) という条件が満たされることが分かります.

次に, (ロ) という条件について考えてみることにします. いま, $f \in W$, $a \in \mathbb{R}$ を, 勝手にひとつずつ取ってきたとします. すると, $f \in W$ ですから,

$$f''(x) = 3f'(x) - 2f(x) \tag{5}$$

となることが分かります．このとき, (5) 式から,

$$\begin{aligned}(af)''(x) &= a \cdot f''(x) \\ &= a \cdot (3f'(x) - 2f(x)) && \text{((5) 式から)} \\ &= 3 \cdot \{a \cdot f'(x)\} - 2 \cdot \{a \cdot f(x)\} \\ &= 3(af)'(x) - 2(af)(x)\end{aligned}$$

となることが分かりますから,

$$af \in W$$

となることが分かります．よって, (ロ) という条件も満たされることが分かります.

以上より, (イ), (ロ) という二つの条件が満たされることが分かりますから, W は線型空間になることが分かります.

「数ベクトル空間の線型部分空間」については「数学 II 演習 (第 5 回) の略解：p.37, 8 節」を参照．また,「線型代数学における基本的な考え方」や「線型空間」については「数学 II 演習 (第 6 回) の略解：p.23, 7 節；p.25, 8 節」を参照．さらに,「(特定の座標軸を持たない) 線型空間の代表例」については,「数学 II 演習 (第 7 回) の略解：p.8, 2 節」を参照.