

A セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 II」
レポート問題 (その 1)

問 1. $\mathbb{R}^3$ の次のような部分集合 V_1, V_2, V_3 を考える.

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0 \right\}$$
$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 1 \right\}$$
$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$

このとき, V_1, V_2, V_3 のそれぞれについて, 線型部分空間であるときには, そのことを証明し, そうでないときには, そうでない理由を示せ.

問 2.

- (1) $V = \{ \mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1,2,\dots} \mid a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, (n \geq 3) \}$ とする. このとき, V は線型空間になることを示せ. すなわち,

(イ) 勝手な元 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ に対して, $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$ となる.

(ロ) 勝手な元 $\mathbf{a} \in V$ と勝手な実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $\alpha \mathbf{a} \in V$ となる.

という二つの条件が満たされることを示せ.

- (2) $W = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f''(x) = 3f'(x) - 2f(x) \}$ とする. このとき, W は線型空間になることを示せ. すなわち,

(イ) 勝手な元 $f, g \in W$ に対して, $f + g \in W$ となる.

(ロ) 勝手な元 $f \in W$ と勝手な実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して, $af \in W$ となる.

という二つの条件が満たされることを示せ.