# Ｓセメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 I」
# レポート問題 (その１１)

**問 1.** 2 行 2 列の行列 $A, B, C$ に対して,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$$

という形の 4 行 4 列の行列を考える. ただし, $O$ は 2 行 2 列の零行列とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) いま, 行列 $A$ の列ベクトルを,

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$$

と表わす. このとき, 2 行 2 列の行列 $B, C$ は, 勝手にひとつずつ固定して,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) &= \begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & C \end{vmatrix} \end{aligned}$$

という関数 $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を考えると, 関数 $f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ は,

(イ) 多重線型性

(ロ) 歪対称性

という二つの性質を満たすことを示せ.

(2) 2 行 2 列の単位行列の列ベクトルを,

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

として, $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ を求めよ.

(3) 行列式

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix}$$

を, 行列 $A, B, C$ の行列式を用いて表わせ.

(4) $A, B$ を 2 行 2 列の行列とするとき, 行列式

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}$$

を, 行列 $A, B$ の行列式を用いて表わせ.

( ヒント : 基本変形を施すことで,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \star & \star \\ O & \star \end{vmatrix}$$

という形に変形してから, (3) の結果を用いてみよ. また, すぐに基本変形の仕方が思い浮かばない場合には, $a, b \in \mathbb{R}$ として,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \star & \star \\ 0 & \star \end{vmatrix}$$

という形に変形するためには, どのような基本変形を施せばよいのかということを考えてみよ. )

**問 2.** $m, n \in \mathbb{R}$ として,

$$E_{(イ)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ E_{(ロ)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ E_{(ハ)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) 基本行列 $E_{(イ)}, E_{(ロ)}, E_{(ハ)}$ の行列式を求めよ.

(2) 3 行 3 列の行列 $A, B$ に対して, $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ となることを用いて,

$$\begin{cases} \det(E_{(イ)}A) = \det(AE_{(イ)}) = -\det A \\ \det(E_{(ロ)}A) = \det(AE_{(ロ)}) = \det A \\ \det(E_{(ハ)}A) = \det(AE_{(ハ)}) = n \cdot \det A \end{cases}$$

となることを示せ.

(3) 行列式は, 行, あるいは, 列に関して,「多重線型性」,「歪対称性」という性質を持つことを用いて, 直接,

$$\begin{cases} \det(E_{(イ)}A) = \det(AE_{(イ)}) = -\det A \\ \det(E_{(ロ)}A) = \det(AE_{(ロ)}) = \det A \\ \det(E_{(ハ)}A) = \det(AE_{(ハ)}) = n \cdot \det A \end{cases}$$

となることを示せ.