

S セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 I」
レポート問題 (その 10) の略解

問 1.

(1) 列ベクトルにもとづく議論のときと同様に,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \\ &= a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= a \cdot \mathbf{e}_1 + b \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{a}_2 &= \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \\ &= c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= c \cdot \mathbf{e}_1 + d \cdot \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

と分解して, 「多重線型性」という性質を用いると,

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} &= f \begin{pmatrix} a \cdot \mathbf{e}_1 + b \cdot \mathbf{e}_2 \\ c \cdot \mathbf{e}_1 + d \cdot \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \\ &= ac \cdot f \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} + ad \cdot f \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \\ &\quad + bc \cdot f \begin{pmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} + bd \cdot f \begin{pmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

となることが分かります.¹ そこで, さらに, 「歪対称性」という性質を用いると,

$$\begin{cases} f \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = 0 \\ f \begin{pmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} = -f \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2)$$

となることが分かりますから, (1) 式, (2) 式から,

$$f \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = (ad - bc) \cdot f \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

と表わせることが分かります.

¹ 「多重線型性」を用いて, いきなり, (1) 式のように計算することに慣れていない方は, 列ベクトルのときと同様に, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ に関する「線型性」を順番に用いることで, (1) 式を導いてみて下さい.

(2) まず,

$$f \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix}$$

として, $f \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$ が, 「多重線型性」と「歪対称性」という二つの性質を持つことを確かめてみることにします. いま,

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}, \mathbf{a}'_1 = \begin{pmatrix} a' & b' \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

とすると,

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}'_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a + a' & b + b' \\ 0 & c & d \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & (a & b) \\ 0 & + \\ & (a' & b') \\ 0 & c & d \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (a & b) \\ + & + \\ 0 & (a' & b') \\ 0 & c & d \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (0 & a & b) \\ + & + \\ (0 & a' & b') \\ 0 & c & d \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (0 & a & b) \\ + & + \\ (0 & a' & b') \\ 0 & c & d \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (0 & a & b) \\ 0 & c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (0 & a' & b') \\ 0 & c & d \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a' & b' \\ 0 & c & d \end{vmatrix} \\ &= f \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

となることが分かります. また, $k \in \mathbb{R}$ とすると,

$$\begin{aligned}
 f \begin{pmatrix} k \cdot \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & ka & kb \\ 0 & c & d \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ 0 & k \cdot (a & b) & \\ 0 & & c & d \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ k \cdot 0 & k \cdot (a & b) & \\ 0 & & c & d \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} & 1 & 0 & 0 \\ k \cdot (0 & a & b) & \\ & 0 & c & d \end{vmatrix} \\
 &= k \cdot \begin{vmatrix} & 1 & 0 & 0 \\ (0 & a & b) & \\ & 0 & c & d \end{vmatrix} \\
 &= k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix} \\
 &= k \cdot f \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \tag{4}
 \end{aligned}$$

となることが分かります. よって, (3) 式, (4) 式から, $f \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$ は, $\mathbf{a}_1$ に関して「線型性」を持つことが分かります. 全く同様にして, $\mathbf{a}_2$ に関する「線型性」を確かめることができますから, $f \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$ は「多重線型性」という性質を持つことが分かります. さらに,

$$\begin{aligned}
 f \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (a & b) & \\ 0 & (c & d) & \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & a & b \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & a & b \end{vmatrix} \\
&= -f \begin{pmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \end{pmatrix} \tag{5}
\end{aligned}$$

となることが分かりますから, $f \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$ は,「歪対称性」という性質も持つことが分かります. よって, (1) の結果から,

$$C = f \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

として,

$$f \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = C \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \tag{6}$$

と表わせることが分かります.² ここで,

$$\begin{aligned}
C &= f \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \tag{7}
\end{aligned}$$

となることが分かりますから, (6) 式, (7) 式から,

$$f \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

²ただし, (1) の結果に現われる $ad - bc$ を,

$$ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

と表わしました.

となることが分かります. したがって,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

となることが分かります.

次に,

$$g \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \\ c & 0 & d \end{vmatrix}$$

として, 前と同様の考察をしてみると, $g \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$ は, 「多重線型性」と「歪対称性」という二つの性質を持つことが分かります. よって, (1) の結果から,

$$C = g \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

として,

$$g \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = C \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad (8)$$

と表わせることが分かります. ここで,

$$\begin{aligned} C &= g \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (1 \text{ 行目} \leftrightarrow 2 \text{ 行目}) \\ &= -1 \end{aligned} \quad (9)$$

となることが分かりますから, (8) 式, (9) 式から,

$$g \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

となることが分かります. したがって,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \\ c & 0 & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

となることが分かります.

最後に,

$$h \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{vmatrix}$$

として, 前と同様の考察をしてみると, $h \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$ は, 「多重線型性」と「歪対称性」という二つの性質を持つことが分かります. よって, (1) の結果から,

$$C = h \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

として,

$$h \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = C \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad (10)$$

と表わせることが分かります. ここで,

$$\begin{aligned} C &= h \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} && (1 \text{ 行目} \leftrightarrow 2 \text{ 行目}) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} && (2 \text{ 行目} \leftrightarrow 3 \text{ 行目}) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (11)$$

となることが分かりますから, (10) 式, (11) 式から,

$$h \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

となることが分かります. したがって,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

となることが分かります.

(3) いま,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と分解して, 一行目に関する「線型性」を用いると,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + b \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad (12)$$

となることが分かります. そこで, まず, (12) 式の第一項に注目してみます. このとき, さらに,

$$\begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix} = d \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e & f \end{pmatrix}$$

と分解して, 二行目に関する「線型性」を用いると,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = d \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad (13)$$

となることが分かります. ここで, 「歪対称性」から, (13) 式の右辺の第一項は 0 になってしまうことが分かりますから,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad (14)$$

となることが分かります. そこで, さらに,

$$\begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix} = g \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & h & i \end{pmatrix}$$

と分解して, (14) 式の右辺に対して, 同様の操作を行なうと,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= g \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

となることが分かります. よって, (14) 式, (15) 式から, (12) 式の第一項に現われる行列式は,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} \quad (16)$$

というように書き直せることが分かります。

全く同様の考察を、(12) 式の第二項、第三項に現われる行列式に対して行なってみると、

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & f \\ g & 0 & i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{vmatrix} \quad (17)$$

となることが分かりますから、(12) 式、(16) 式、(17) 式から、

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + b \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & f \\ g & 0 & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{vmatrix} \quad (18)$$

となることが分かります。そこで、(2) の結果を (18) 式の右辺に用いると、

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

という一行目に関する展開公式が得られることが分かります。

問 2. 以下では、与えられた行列を A と表わすことにします。

(1) 与えられた行列 A の行列式を計算してみると、例えば、

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \quad (\text{1 列目で展開}) \\ &= 2 \cdot (4 - 1) - 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

となることが分かります。よって、

$$\det A = 4$$

となることが分かります。

(2) 与えられた行列 A の行列式を計算してみると、例えば、

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad (\text{1 行目} + \text{2 行目} \times 2)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} && (1 \text{ 列目で展開}) \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} && (1 \text{ 行目} + 2 \text{ 行目} \times 3) \\
&= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} && (1 \text{ 列目で展開}) \\
&= 8 - 3 \\
&= 5
\end{aligned}$$

となることが分かります. よって,

$$\det A = 5$$

となることが分かります.

(3) 与えられた行列 A の行列式を計算してみると, 例えば,

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ -1 & 0 & t \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ t^2 & t & -1 \\ -1 & 0 & t \end{vmatrix} && (1 \text{ 列目} + 2 \text{ 列目} \times t) \\
&= \begin{vmatrix} t^2 & -1 \\ -1 & t \end{vmatrix} && (1 \text{ 行目で展開}) \\
&= t^3 - 1
\end{aligned}$$

となることが分かります. よって,

$$\det A = t^3 - 1$$

となることが分かります.

(4) 与えられた行列 A の行列式を計算してみると, 例えば,

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} && \begin{pmatrix} 2 \text{ 列目} + 1 \text{ 列目} \times (-1) \\ 3 \text{ 列目} + 1 \text{ 列目} \times (-1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} && (1 \text{ 行目で展開}) \\
&= (b-a)(c-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (b-a)(c-a)(c-b) \\
 &= (a-b)(b-c)(c-a)
 \end{aligned}$$

となることが分かります. よって,

$$\det A = (a-b)(b-c)(c-a)$$

となることが分かります

「行列式の計算原理」や「行列式の展開公式」については、「数学Ⅱ演習(第5回)の略解: p.23, 5節; p.28, 6節」を参照.