Ｓセメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 I」
レポート問題 (その１０)

問 1.

(1) 2 行 2 列の行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

の行ベクトルを,

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix},\ \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

と表わすことにする. このとき, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ を変数とする関数

$$f\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$$

が,[1]

(イ) 多重線型性: 勝手なベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2' \in \mathbb{R}^2$ と, 勝手な実数 $k \in \mathbb{R}$ に対して, 次が成り立つ.

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1' \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1' \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} k \cdot \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = k \cdot f\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2' \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ k \cdot \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = k \cdot f\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(ロ) 歪対称性: 勝手なベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ に対して, 次が成り立つ.

$$f\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = -f\begin{pmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \end{pmatrix}$$

---

[1] 行ベクトルをもとにして考察していることを強調するために, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ を変数とする関数を, $f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ ではなく,

$$f\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$$

という記号を用いて表わすことにしました.

という二つの性質を持つとき, $f\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\end{pmatrix}$ は,

$$f\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\end{pmatrix}=(ad-bc)\cdot f\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\\mathbf{e}_2\end{pmatrix}$$

と表わせることを示せ. ただし,

$$\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2=\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

と表わした.

(2) 行列式は, 行に関しても,

(イ) 多重線型性

(ロ) 歪対称性

(ハ) 規格化条件

という三つの条件を満たすということと, (1) の結果を用いて,

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&a&b\\0&c&d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}0&1&0\\a&0&b\\c&0&d\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}0&0&1\\a&b&0\\c&d&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$$

となることを示せ.

(3) (2) の結果を用いて, 一行目に関する展開公式

$$\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix}e&f\\h&i\end{vmatrix}-b\cdot\begin{vmatrix}d&f\\g&i\end{vmatrix}+c\cdot\begin{vmatrix}d&e\\g&h\end{vmatrix}$$

を導け.

問 2. 次の行列の行列式を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$,

(3) $\begin{pmatrix}t&-1&0\\0&t&-1\\-1&0&t\end{pmatrix}$, (4) $\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{pmatrix}$.