Sセメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 I」
レポート問題 (その９) の略解

問 1.

(1) 例えば, 最初に,

$$\mathbf{a}_1 = a \cdot \mathbf{e}_1 + d \cdot \mathbf{e}_2 + g \cdot \mathbf{e}_3$$

と分解して, $f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ という関数の $\mathbf{a}_1$ に関する「線型性」を用いると,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) &= f(a \cdot \mathbf{e}_1 + d \cdot \mathbf{e}_2 + g \cdot \mathbf{e}_3, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \\ &= f(a \cdot \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) + f(d \cdot \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) + f(g \cdot \mathbf{e}_3, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \\ &= a \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) + d \cdot f(\mathbf{e}_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) + g \cdot f(\mathbf{e}_3, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \end{aligned} \tag{1}$$

となることが分かります. さらに,

$$\mathbf{a}_2 = b \cdot \mathbf{e}_1 + e \cdot \mathbf{e}_2 + h \cdot \mathbf{e}_3$$

と分解して, $f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ という関数の $\mathbf{a}_2$ に関する「線型性」を用いると, $k = 1, 2, 3$ に対して,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_k, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) &= f(\mathbf{e}_k, b \cdot \mathbf{e}_1 + e \cdot \mathbf{e}_2 + h \cdot \mathbf{e}_3, \mathbf{a}_3) \\ &= f(\mathbf{e}_k, b \cdot \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_3) + f(\mathbf{e}_k, e \cdot \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_3) + f(\mathbf{e}_k, h \cdot \mathbf{e}_3, \mathbf{a}_3) \\ &= b \cdot f(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_3) + e \cdot f(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_3) + h \cdot f(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_3, \mathbf{a}_3) \end{aligned} \tag{2}$$

となることが分かりますから, (1) 式, (2) 式から,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) =& ab \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_3) + ae \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_3) + ah \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{a}_3) \\ &+ db \cdot f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_3) + de \cdot f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_3) + dh \cdot f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{a}_3) \\ &+ gb \cdot f(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_3) + ge \cdot f(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_3) + gh \cdot f(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{a}_3) \end{aligned} \tag{3}$$

となることが分かります. 最後に,

$$\mathbf{a}_3 = c \cdot \mathbf{e}_1 + f \cdot \mathbf{e}_2 + i \cdot \mathbf{e}_3$$

と分解して, $f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ という関数の $\mathbf{a}_3$ に関する「線型性」を用いると, $k, l = 1, 2, 3$ に対して,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l, \mathbf{a}_3) &= f(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l, c \cdot \mathbf{e}_1 + f \cdot \mathbf{e}_2 + i \cdot \mathbf{e}_3) \\ &= f(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l, c \cdot \mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l, f \cdot \mathbf{e}_2) + f(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l, i \cdot \mathbf{e}_3) \\ &= c \cdot f(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_1) + f \cdot f(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_2) + i \cdot f(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_3) \end{aligned} \tag{4}$$

となることが分かりますから, (3) 式, (4) 式から,

$$
\begin{aligned}
&f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \\
&\qquad = abc \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + abf \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + abi \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \\
&\qquad\quad + aec \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + aef \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) + aei \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\
&\qquad\quad + ahc \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) + ahf \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) + ahi \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) \\
&\qquad\quad + dbc \cdot f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + dbf \cdot f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + dbi \cdot f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \\
&\qquad\quad + dec \cdot f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + def \cdot f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) + dei \cdot f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\
&\qquad\quad + dhc \cdot f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) + dhf \cdot f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) + dhi \cdot f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) \\
&\qquad\quad + gbc \cdot f(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + gbf \cdot f(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + gbi \cdot f(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \\
&\qquad\quad + gec \cdot f(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + gef \cdot f(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) + gei \cdot f(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\
&\qquad\quad + ghc \cdot f(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) + ghf \cdot f(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) + ghi \cdot f(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

となることが分かります.

上では, それぞれの変数に対する「線型性」を順番に用いて計算しましたが,「多重線型性」の扱いに慣れている方は, 最初から,

$$
\begin{cases}
\mathbf{a}_1 = a \cdot \mathbf{e}_1 + d \cdot \mathbf{e}_2 + g \cdot \mathbf{e}_3 \\
\mathbf{a}_2 = b \cdot \mathbf{e}_1 + e \cdot \mathbf{e}_2 + h \cdot \mathbf{e}_3 \\
\mathbf{a}_3 = c \cdot \mathbf{e}_1 + f \cdot \mathbf{e}_2 + i \cdot \mathbf{e}_3
\end{cases}
$$

というように分解して,

$$
f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = f(a \cdot \mathbf{e}_1 + d \cdot \mathbf{e}_2 + g \cdot \mathbf{e}_3, b \cdot \mathbf{e}_1 + e \cdot \mathbf{e}_2 + h \cdot \mathbf{e}_3, c \cdot \mathbf{e}_1 + f \cdot \mathbf{e}_2 + i \cdot \mathbf{e}_3)
$$

と表わした上で, 例えば, 一番目の変数の部分から $a \cdot \mathbf{e}_1$ が選ばれ, 二番目の変数の部分から $b \cdot \mathbf{e}_1$ が選ばれ, 三番目の変数の部分から $c \cdot \mathbf{e}_1$ が選ばれた場合として,

$$
f(a \cdot \mathbf{e}_1, b \cdot \mathbf{e}_1, c \cdot \mathbf{e}_1) = abc \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)
$$

という項が得られるなどと考えて, 直接, (5) 式の結果を書き下しても, もちろん構いません.

(2) 「歪対称性」から, 例えば, $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ のように, **同じベクトルが重複して現われるような項は 0 になってしまう**ことに注意して, (5) 式の右辺において, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ が, それぞれ, 一度ずつ登場している項だけを拾ってみると,

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = & aei \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + ahf \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) + dbi \cdot f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \\
& + dhc \cdot f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) + gbf \cdot f(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + gec \cdot f(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)
\end{aligned} \qquad (6)
$$

となることが分かります. そこで, さらに,

$$f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) = -f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \qquad\qquad (\mathbf{e}_3 \leftrightarrow \mathbf{e}_2)$$

などと計算してみると,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) &= -f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) = -f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \\ &= f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) = f(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = -f(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) \end{aligned}$$

となることが分かりますから, (6) 式と合わせて,

$$f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = (aei - ahf - dbi + dhc + gbf - gec) \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \tag{7}$$

と表わせることが分かります.

(3) $f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ が, さらに,

$$f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1 \tag{8}$$

という「規格化条件」を満たすとすると, (7) 式, (8) 式から,

$$f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = aei - ahf - dbi + dhc + gbf - gec$$

と表わせることが分かります.

問 2.

(1) 問 1 と同様に,

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 = a_{11} \cdot \mathbf{e}_1 + a_{21} \cdot \mathbf{e}_2 + a_{31} \cdot \mathbf{e}_3 + a_{41} \cdot \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{a}_2 = a_{12} \cdot \mathbf{e}_1 + a_{22} \cdot \mathbf{e}_2 + a_{32} \cdot \mathbf{e}_3 + a_{42} \cdot \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{a}_3 = a_{13} \cdot \mathbf{e}_1 + a_{23} \cdot \mathbf{e}_2 + a_{33} \cdot \mathbf{e}_3 + a_{43} \cdot \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{a}_4 = a_{14} \cdot \mathbf{e}_1 + a_{24} \cdot \mathbf{e}_2 + a_{34} \cdot \mathbf{e}_3 + a_{44} \cdot \mathbf{e}_4 \end{cases}$$

と分解して,「多重線型性」を用いると, 一番目の変数の部分から $a_{i1} \cdot \mathbf{e}_i$ が選ばれ, 二番目の変数の部分から $a_{j2} \cdot \mathbf{e}_j$ が選ばれ, 三番目の変数の部分から $a_{k3} \cdot \mathbf{e}_k$ が選ばれ, 四番目の変数の部分から $a_{l4} \cdot \mathbf{e}_l$ が選ばれた場合として,

$$f(a_{i1} \cdot \mathbf{e}_i, a_{j2} \cdot \mathbf{e}_j, a_{k3} \cdot \mathbf{e}_k, a_{l4} \cdot \mathbf{e}_l) = a_{i1}a_{j2}a_{k3}a_{l4} \cdot f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)$$

という項が得られることが分かりますから,

$$f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = \sum_{i,j,k,l=1}^{4} a_{i1}a_{j2}a_{k3}a_{l4} \cdot f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) \tag{9}$$

と表わせることが分かります．さらに,「歪対称性」という性質を用いると, $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4)$ など, **同じベクトルが重複して現われるような項は 0 になってしまう**ことが分かりますから, (9) 式の右辺に現われる 4^4 個の項のうち $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ を入れ替えたような形をした 4! 個の項だけが残ることが分かります．そこで, これら 4! 個の項だけを拾ってみると, $f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ は,

$$
\begin{aligned}
&f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) \\
&\qquad = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) + a_{11}a_{22}a_{43}a_{34} \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3) \\
&\qquad\quad + a_{11}a_{32}a_{23}a_{44} \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4) + a_{11}a_{32}a_{43}a_{24} \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2) \\
&\qquad\quad + a_{11}a_{42}a_{23}a_{34} \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + a_{11}a_{42}a_{33}a_{24} \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) \\
&\qquad\quad + a_{21}a_{12}a_{33}a_{44} \cdot f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) + a_{21}a_{12}a_{43}a_{34} \cdot f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3) \\
&\qquad\quad + a_{21}a_{32}a_{13}a_{44} \cdot f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4) + a_{21}a_{32}a_{43}a_{14} \cdot f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1) \\
&\qquad\quad + a_{21}a_{42}a_{13}a_{34} \cdot f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) + a_{21}a_{42}a_{33}a_{14} \cdot f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) \\
&\qquad\quad + a_{31}a_{12}a_{23}a_{44} \cdot f(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4) + a_{31}a_{12}a_{43}a_{24} \cdot f(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2) \\
&\qquad\quad + a_{31}a_{22}a_{13}a_{44} \cdot f(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4) + a_{31}a_{22}a_{43}a_{14} \cdot f(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1) \\
&\qquad\quad + a_{31}a_{42}a_{13}a_{24} \cdot f(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + a_{31}a_{42}a_{23}a_{14} \cdot f(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) \\
&\qquad\quad + a_{41}a_{12}a_{23}a_{34} \cdot f(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + a_{41}a_{12}a_{33}a_{24} \cdot f(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) \\
&\qquad\quad + a_{41}a_{22}a_{13}a_{34} \cdot f(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) + a_{41}a_{22}a_{33}a_{14} \cdot f(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) \\
&\qquad\quad + a_{41}a_{32}a_{13}a_{24} \cdot f(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + a_{41}a_{32}a_{23}a_{14} \cdot f(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)
\end{aligned}
$$

と表わせることが分かります．さらに,「歪対称性」を用いて,

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4) &= -f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) && (\ \mathbf{e}_3 \leftrightarrow \mathbf{e}_1\ ) \\
&= f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) && (\ \mathbf{e}_2 \leftrightarrow \mathbf{e}_1\ )
\end{aligned}
$$

などと計算してみると,

$$
\begin{aligned}
&f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) \\
&\qquad = (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{43}a_{34} - a_{11}a_{32}a_{23}a_{44} \\
&\qquad\qquad + a_{11}a_{32}a_{43}a_{24} + a_{11}a_{42}a_{23}a_{34} - a_{11}a_{42}a_{33}a_{24} \\
&\qquad\qquad - a_{21}a_{12}a_{33}a_{44} + a_{21}a_{12}a_{43}a_{34} + a_{21}a_{32}a_{13}a_{44} \\
&\qquad\qquad - a_{21}a_{32}a_{43}a_{14} - a_{21}a_{42}a_{13}a_{34} + a_{21}a_{42}a_{33}a_{14} \\
&\qquad\qquad + a_{31}a_{12}a_{23}a_{44} - a_{31}a_{12}a_{43}a_{24} - a_{31}a_{22}a_{13}a_{44} \\
&\qquad\qquad + a_{31}a_{22}a_{43}a_{14} + a_{31}a_{42}a_{13}a_{24} - a_{31}a_{42}a_{23}a_{14} \\
&\qquad\qquad - a_{41}a_{12}a_{23}a_{34} + a_{41}a_{12}a_{33}a_{24} + a_{41}a_{22}a_{13}a_{34} \\
&\qquad\qquad -a_{41}a_{22}a_{33}a_{14} - a_{41}a_{32}a_{13}a_{24} + a_{41}a_{32}a_{23}a_{14}) \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)
\end{aligned}
$$

となることが分かります．

(2) いま, $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l$ がすべて異なると仮定してみます. すると, $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l$ は $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ を入れ換えたものになっているということですから,

$$\sigma(1) = i,\ \sigma(2) = j, \sigma(3) = k,\ \sigma(4) = l$$

という式によって, $\sigma : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ を定めると, $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ となることが分かります. 逆に, $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ とすると, $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4)$ は $1, 2, 3, 4$ の順番を入れ換えたものになっているということですから, $\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \mathbf{e}_{\sigma(2)}, \mathbf{e}_{\sigma(3)}, \mathbf{e}_{\sigma(4)}$ はすべて異なることが分かります.

したがって, (9) 式の右辺に現われる項のうち, $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l$ がすべて異なるような項は, $\mathfrak{S}_4$ の元 $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ を用いて,

$$i = \sigma(1),\ j = \sigma(2),\ k = \sigma(3),\ l = \sigma(4)$$

と表わせる項と対応していることが分かります. よって,

$$f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} a_{\sigma(4)4} \cdot f(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \mathbf{e}_{\sigma(2)}, \mathbf{e}_{\sigma(3)}, \mathbf{e}_{\sigma(4)}) \quad (10)$$

と表わせることが分かります. さらに,

$$f(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \mathbf{e}_{\sigma(2)}, \mathbf{e}_{\sigma(3)}, \mathbf{e}_{\sigma(4)}) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$$

という式と合わせると,

$$f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} a_{\sigma(4)4} \right) \cdot f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$$

と表わせることが分かります.

「行列式が (符号付きの) 面積や体積を表わしていること」や「行列式が, (イ) 多重線型性, (ロ) 歪対称性, (ハ) 規格化条件という三つの性質で特徴づけられること」については, 「数学 II 演習 (第 5 回) の略解 : p.5, 3 節」を参照.