Sセメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 I」
レポート問題 (その８) の略解

問 1.

(1) 例えば, 最初に y を消去して, x の値を求めてから, 次に, y の値を求めるという方針を採ることにすると, 次のように計算を進めることができます. いま,

$$\begin{cases} x+2y=5 & \cdots\ (1) \\ 2x+y=4 & \cdots\ (2) \end{cases}$$

というように式番号を付けることにします. このとき, (1) 式から (2) 式の 2 倍を引いてみると,

$$-3x=-3 \qquad \cdots\ (3)$$

となることが分かります. そこで, (3) 式の両辺を $-\frac{1}{3}$ 倍してみると,

$$x=1 \qquad \cdots\ (4)$$

となることが分かります. さらに, (4) 式を (2) 式に代入してみることで,

$$y=2 \qquad \cdots\ (5)$$

となることが分かります. したがって, 与えられた連立一次方程式の解は,

$$\begin{cases} x=1 & \cdots\ (4) \\ y=2 & \cdots\ (5) \end{cases}$$

で与えられることが分かります.

(2) (1) で行なった計算を,「連立一次方程式の書き換え」として表わしてみると,

$$\begin{cases} x+2y=5 & \cdots\ (1) \\ 2x+y=4 & \cdots\ (2) \end{cases}$$

$$\Big\downarrow \text{(1) 式} + \text{(2) 式} \times (-2)$$

$$\begin{cases} -3x=-3 & \cdots\ (3) \\ 2x+y=4 & \cdots\ (2) \end{cases}$$

$$\Big\downarrow \text{(3) 式} \times (-\tfrac{1}{3})$$

$$
\begin{cases} x = 1 & \cdots\ (4) \\ 2x + y = 4 & \cdots\ (2) \end{cases}
$$

$$
\Big\downarrow \text{(4) 式を (2) 式に代入}
$$

$$
\begin{cases} x = 1 & \cdots\ (4) \\ y = 2 & \cdots\ (5) \end{cases}
$$

と表わせることが分かります.

(3) (2) で得られた「連立一次方程式の書き換え」は, 行列を用いて,

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}
$$

$$
\Big\downarrow
$$

$$
\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}
$$

$$
\Big\downarrow
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}
$$

$$
\Big\downarrow
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

というように表わせることが分かります.

(4) (2) で行なった「連立一次方程式の書き換え」は,

$$
\left(A \;\middle|\; \mathbf{b} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{1 行目+2 行目}\times(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right)
$$

$$
\xrightarrow{\text{1 行目}\times(-\frac{1}{3})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{2 行目+ 1 行目}\times(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right)
$$

という行変形に対応していることが分かります.

問 2. 与えられた方程式を, **行変形だけを用いて基本変形してみる**と, 例えば,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 2 & -2 & 1 & b \\ -1 & 1 & 2 & c \end{array}\right) \xrightarrow[3\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times 1]{2\text{ 行目}+1\text{ 行目}\times(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -1 & b-2a \\ 0 & 0 & 3 & c+a \end{array}\right) \xrightarrow[3\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times 3]{1\text{ 行目}+2\text{ 行目}\times 1}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & -1 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & -5a+3b+c \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行目}\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & 2a-b \\ 0 & 0 & 0 & -5a+3b+c \end{array}\right)$$

となることが分かります. したがって, これは, 最初の連立一次方程式が,

$$\begin{cases} x-y=b-a \\ z=2a-b \\ 0=-5a+3b+c \end{cases} \tag{1}$$

というように変形できたことを表わしています. よって, 与えられた連立一次方程式が解を持つためには,

$$-5a+3b+c=0 \tag{2}$$

でなければならないことが分かります. また, (2) 式の条件が満たされるとき, 与えられた連立一次方程式の解は,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b-a \\ 0 \\ 2a-b \end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}$$

となることが分かります.[1]

もちろん, 解の表示は上のような形でなくとも構いません. すなわち, 与えられた連立一次方程式を $A\mathbf{u}=\mathbf{b}$ という形に表わすときに,

$$\mathbf{u}=t\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}_0, \quad t\in\mathbb{R}$$

として,

(イ) $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ は, $A\mathbf{v}=\mathbf{0}$ という連立一次方程式の解である.

(ロ) $\mathbf{u}_0$ は, $A\mathbf{u}_0=\mathbf{b}$ という与えられた連立一次方程式の特殊解である.

という二つの条件さえ満たしていれば, どのような表示であっても構いません.

「基本変形を用いて連立一次方程式を解くこと」については,「数学 II 演習 (第 5 回) の略解 : p.43, 10 節 ; p.46, 11 節」を参照.

[1] (1) 式を, y の値を, $y=t$ というように, 勝手にひとつ決めたとき, x, z の値がどう決まるのかということを表わしている式であると解釈しました.