

S セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 I」 レポート問題 (その 8)

問 1.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

という連立一次方程式について考える. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) 上の連立一次方程式を, 中学校以来, 慣れ親しんできた方法で解いてみよ. すなわち, 二つの式から, 最初に, x , あるいは, y を消去することにより, 連立一次方程式の解を求めてみよ. ただし, 最初に与えられた式に, 例えば,

$$\begin{cases} x + 2y = 5 & \cdots (1) \\ 2x + y = 4 & \cdots (2) \end{cases}$$

などと式番号を付けて, 「(1) 式から (2) 式の 2 倍を引いて,

$$-3x = -3 \quad \cdots (3)$$

となる」などと, 「どのような計算を行なうことで, どのような式が得られるのか」ということをひとつひとつ書き下しながら計算を進めよ.

- (2) (1) で行なった計算を, 例えば,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x + 2y = 5 & \cdots (1) \\ 2x + y = 4 & \cdots (2) \end{cases} \\ &\quad \downarrow (1) \text{ 式} + (2) \text{ 式} \times (-2) \\ &\begin{cases} -3x = -3 & \cdots (3) \\ 2x + y = 4 & \cdots (2) \end{cases} \end{aligned}$$

というように, 「連立一次方程式の書き換え」として表わしてみよ.

- (3) (2) で得られた「連立一次方程式の書き換え」を, 例えば,

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &\quad \downarrow \\ &\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

というように, 行列を用いて表わせ.

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ として, 最初の連立一次方程式を,

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b}$$

と表わすとき, (2) で行なった「連立一次方程式の書き換え」を,

$$\left(A \mid \mathbf{b} \right) \xrightarrow{\text{行に関する基本変形}} \left(A' \mid \mathbf{b}' \right)$$

というように「行に関する基本変形」として解釈してみよ. ただし, 例えば,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = 1 & \cdots (4) \\ 2x + y = 4 & \cdots (2) \end{cases} \\ & \quad \downarrow (4) \text{ 式を } (2) \text{ 式に代入} \\ & \begin{cases} x = 1 & \cdots (4) \\ y = 2 & \cdots (5) \end{cases} \end{aligned}$$

というような式変形は,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = 1 & \cdots (4) \\ 2x + y = 4 & \cdots (2) \end{cases} \\ & \quad \downarrow (2) \text{ 式} + (4) \text{ 式} \times (-2) \\ & \begin{cases} x = 1 & \cdots (4) \\ y = 2 & \cdots (5) \end{cases} \end{aligned}$$

というように解釈できることなどに注意せよ.

問 2. $a, b, c \in \mathbb{R}$ として, 連立一次方程式

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ 2x - 2y + z = b \\ -x + y + 2z = c \end{cases}$$

が解を持つための条件を a, b, c を用いて表わせ. また, そのときの連立一次方程式の解をすべて求めよ.