

S セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 I」
レポート問題 (その 7) の略解

問 1.

(1) 与えられた行列を,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表わすことにして, 行列 A と単位行列 I を横に並べて, 行に関する同じ基本変形を施すと, 例えば,

$$\left(A \mid I \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{1 \text{ 行目} \leftrightarrow 3 \text{ 行目}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

というように変形できることが分かります. したがって,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

たなることが分かります.

(2) 同様に, 与えられた行列を,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

と表わすことにして, 行列 A と単位行列 I を横に並べて, 行に関する同じ基本変形を施すと, 例えば,

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{\substack{1 \text{ 行目} \times \alpha^{-1} \\ 2 \text{ 行目} \times \alpha^{-1} \\ 3 \text{ 行目} \times \alpha^{-1}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha^{-1} & 0 & \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha^{-1} & 0 & \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha^{-1} \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{2 \text{ 行目} + 3 \text{ 行目} \times (-\alpha^{-1})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha^{-1} & 0 & \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha^{-1} & -\alpha^{-2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha^{-1} \end{array} \right) \xrightarrow{1 \text{ 行目} + 2 \text{ 行目} \times (-\alpha^{-1})} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \alpha^{-1} & -\alpha^{-2} & \alpha^{-3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha^{-1} & -\alpha^{-2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha^{-1} \end{array} \right) \end{aligned}$$

というように変形できることが分かります. したがって,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & -\alpha^{-2} & \alpha^{-3} \\ 0 & \alpha^{-1} & -\alpha^{-2} \\ 0 & 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$$

となることが分かります.

(3) 同様に, 与えられた行列を,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

と表わすことにして, 行列 A と単位行列 I を横に並べて, 行に関する同じ基本変形を施すと, 例えば,

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[1 \text{ 行目}+3 \text{ 行目} \times 1]{1 \text{ 行目}+2 \text{ 行目} \times 1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[3 \text{ 行目} \times 2]{2 \text{ 行目}+1 \text{ 行目} \times 1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[1 \text{ 行目} \times 4]{3 \text{ 行目}+2 \text{ 行目} \times 1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[2 \text{ 行目} \times 2]{1 \text{ 行目}+3 \text{ 行目} \times (-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

というように変形できることが分かります. したがって, 各行を $\frac{1}{4}$ 倍してみると,

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

となることが分かります.

(4) 同様に, 与えられた行列を,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

と表わすことにして、行列 A と単位行列 I を横に並べて、行に関する同じ基本変形を施すと、例えば、

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{1 \text{ 行目} + (2 \text{ 行目} + 3 \text{ 行目} + 4 \text{ 行目}) \\ 2 \text{ 行目} + (3 \text{ 行目} + 4 \text{ 行目}) \\ 3 \text{ 行目} + 4 \text{ 行目} \times 1}} \\
 & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{2 \text{ 行目} + 1 \text{ 行目} \times 1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{3 \text{ 行目} + 2 \text{ 行目} \times 1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{4 \text{ 行目} + 3 \text{ 行目} \times 1} \\
 & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{1 \text{ 行目} \times 5 \\ 2 \text{ 行目} \times 5 \\ 3 \text{ 行目} \times 5}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 5 & 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 10 & 5 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & 5 & 10 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\substack{1 \text{ 行目} + 4 \text{ 行目} \times (-1) \\ 2 \text{ 行目} + 4 \text{ 行目} \times (-2) \\ 3 \text{ 行目} + 4 \text{ 行目} \times (-3)}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 5 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 3 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 & 4 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

というように変形できることが分かります。したがって、各行を $\frac{1}{5}$ 倍してみると、

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

となることが分かります。

問 2.

- (1) 与えられた行列 A に対して、行と列に関する基本変形を施してみると、例えば、

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 行目} + 1 \text{ 行目} \times (-a)} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 - a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 列目} + 1 \text{ 列目} \times (-a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - a^2 \end{pmatrix}$$

というように変形できることが分かります。したがって、 $a^2 = 1$ のときには、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となりますから、 $\text{rank } A = 1$ となることが分かります。一方、 $a^2 \neq 1$ のときには、さらに、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 行目} \times \frac{1}{1-a^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

というように変形できることが分かりますから、 $\text{rank } A = 2$ となることが分かります。

以上より、

$$\begin{cases} \text{rank } A = 1, & (a^2 = 1 \text{ のとき}) \\ \text{rank } A = 2, & (a^2 \neq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となることが分かります。

さらに、 $a^2 \neq 1$ のとき、与えられた行列 A と単位行列 I を横に並べて、行に関する基本変形を施してみると、例えば、

$$\begin{aligned} (A \mid I) &= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{2 \text{ 行目} + 1 \text{ 行目} \times (-a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 - a^2 & -a & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{1 \text{ 行目} \times (1-a^2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 - a^2 & a(1 - a^2) & 1 - a^2 & 0 \\ 0 & 1 - a^2 & -a & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{1 \text{ 行目} + 2 \text{ 行目} \times (-a)} \\ &\left(\begin{array}{cc|cc} 1 - a^2 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 1 - a^2 & -a & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

というように変形できることが分かります。したがって、すべての行を $(1 - a^2)$ で割ってみることで、

$$A^{-1} = \frac{1}{1 - a^2} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$$

となることが分かります。

- (2) 全く同様に, 与えられた行列 A に対して, 行と列に関する基本変形を施してみると, 例えば,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \text{ 行目} + 1 \text{ 行目} \times (-a)} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & -a^2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3 \text{ 行目} + 2 \text{ 行目} \times a^2]{1 \text{ 行目} + 2 \text{ 行目} \times (-a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 + a^3 \end{pmatrix} \xrightarrow[3 \text{ 列目} + 2 \text{ 列目} \times (-a)]{3 \text{ 列目} + 1 \text{ 列目} \times a^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + a^3 \end{pmatrix}$$

というように変形できることが分かります. したがって, $a^3 = -1$ のときには,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となりますから, $\text{rank } A = 2$ となることが分かります. 一方, $a^3 \neq -1$ のときには, さらに,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + a^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \text{ 行目} \times \frac{1}{1+a^3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

というように変形できることが分かりますから, $\text{rank } A = 3$ となることが分かります.

以上より,

$$\begin{cases} \text{rank } A = 2, & (a^3 = -1 \text{ のとき}) \\ \text{rank } A = 3, & (a^3 \neq -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となることが分かります.

さらに, $a^3 \neq -1$ のとき, 与えられた行列 A と単位行列 I を横に並べて, 行に関する基本変形を施してみると, 例えば,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & | & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \text{ 行目} + 1 \text{ 行目} \times (-a)} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a^2 & 1 & | & -a & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3 \text{ 行目} + 2 \text{ 行目} \times a^2]{1 \text{ 行目} + 2 \text{ 行目} \times (-a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a^2 & | & 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & a & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + a^3 & | & -a & a^2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2 \text{ 行目} \times (1+a^3)]{1 \text{ 行目} \times (1+a^3)} \begin{pmatrix} 1 + a^3 & 0 & -a^2(1+a^3) & | & 1 + a^3 & -a(1+a^3) & 0 \\ 0 & 1 + a^3 & a(1+a^3) & | & 0 & 1 + a^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + a^3 & | & -a & a^2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 行目} + 3 \text{ 行目} \times (-a)} \begin{pmatrix} 1 + a^3 & 0 & -a^2(1+a^3) & | & 1 + a^3 & -a(1+a^3) & 0 \\ 0 & 1 + a^3 & a(1+a^3) & | & 0 & 1 + a^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + a^3 & | & -a & a^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1+a^3 & 0 & 0 & 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1+a^3 & 0 & a^2 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1+a^3 & -a & a^2 & 1 \end{array} \right)$$

というように変形できることが分かります. したがって, すべての行を $(1+a^3)$ で割ってみることで,

$$A^{-1} = \frac{1}{1+a^3} \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ a^2 & 1 & -a \\ -a & a^2 & 1 \end{pmatrix}$$

となることが分かります.

「基本変形を用いて逆行列を求めること」については, 「数学Ⅱ演習(第3回)の略解: p.17, 5節」, 「数学Ⅱ演習(第4回)の略解: p.14, 7節」を参照. また, 問1の(2)と(3), (4)の例, あるいは, 問2の例に関する関連した考察については, それぞれ, 「数学Ⅱ演習(第3回)の略解: p.22, 6節」, 「数学Ⅱ演習(第4回)の略解: p.2, 2節; p.9, 6節」も参照.