

S セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 I」 レポート問題 (その 6) の略解

問 1.

(1) 3 行 3 列の基本行列

$$E = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

を, A の左から掛け算することが, 行列 A の行変形に対応することと, 基本行列 E の i 行目

$$\begin{pmatrix} \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \alpha_{i3} \end{pmatrix}$$

が, EA という行列の i 行目に,

$$(A \text{ の } 1 \text{ 行目}) \times \alpha_{i1} + (A \text{ の } 2 \text{ 行目}) \times \alpha_{i2} + (A \text{ の } 3 \text{ 行目}) \times \alpha_{i3}$$

を書くという命令に対応していることに注意します. すると, 「1 行目と 3 行目をひっくり返す」という命令は「 EA という行列の 1 行目に,

$$(A \text{ の } 1 \text{ 行目}) \times 0 + (A \text{ の } 2 \text{ 行目}) \times 0 + (A \text{ の } 3 \text{ 行目}) \times 1$$

を書き, 2 行目に,

$$(A \text{ の } 1 \text{ 行目}) \times 0 + (A \text{ の } 2 \text{ 行目}) \times 1 + (A \text{ の } 3 \text{ 行目}) \times 0$$

を書き, 3 行目に,

$$(A \text{ の } 1 \text{ 行目}) \times 1 + (A \text{ の } 2 \text{ 行目}) \times 0 + (A \text{ の } 3 \text{ 行目}) \times 0$$

を書く」という命令と解釈できますから, 対応する基本行列は,

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられることが分かります. 実際, EA という行列を計算してみると,

$$\begin{aligned} EA &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e & f \\ c & d \\ a & b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることが分かります.

- (2) (1) と同様にして、「2 行目に 1 行目の (-3) 倍を足す」という命令は「 EA という行列の 1 行目に、

$$(A \text{ の } 1 \text{ 行目}) \times 1 + (A \text{ の } 2 \text{ 行目}) \times 0 + (A \text{ の } 3 \text{ 行目}) \times 0$$

を書き、2 行目に、

$$(A \text{ の } 1 \text{ 行目}) \times (-3) + (A \text{ の } 2 \text{ 行目}) \times 1 + (A \text{ の } 3 \text{ 行目}) \times 0$$

を書き、3 行目に、

$$(A \text{ の } 1 \text{ 行目}) \times 0 + (A \text{ の } 2 \text{ 行目}) \times 0 + (A \text{ の } 3 \text{ 行目}) \times 1$$

を書く」という命令と解釈できますから、対応する基本行列は、

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられることが分かります。実際、 EA という行列を計算してみると、

$$\begin{aligned} EA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c - 3a & d - 3b \\ e & f \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることが分かります。

- (3) 2 行 2 列の基本行列

$$E = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$$

を、 A の右から掛け算することが、行列 A の列変形に対応することと、基本行列 E の j 列目

$$\begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ \beta_{2j} \end{pmatrix}$$

が、 AE という行列の j 列目に、

$$(A \text{ の } 1 \text{ 列目}) \times \beta_{1j} + (A \text{ の } 2 \text{ 列目}) \times \beta_{2j}$$

を書くという命令に対応していることに注意します。すると、「1 列目に 2 行目の 5 倍を足す」という命令は「 AE という行列の 1 列目に、

$$(A \text{ の } 1 \text{ 列目}) \times 1 + (A \text{ の } 2 \text{ 列目}) \times 5$$

を書き, 2 列目に,

$$(A \text{ の } 1 \text{ 列目}) \times 0 + (A \text{ の } 2 \text{ 列目}) \times 1$$

を書く」という命令と解釈できますから, 対応する基本行列は,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられることが分かります. 実際, EA という行列を計算してみると,

$$\begin{aligned} EA &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+5b & b \\ c+5d & d \\ e+5f & f \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることが分かります.

- (4) (3) と同様に, 「2 列目を 2 倍する」という命令は「 EA という行列の 1 列目に,

$$(A \text{ の } 1 \text{ 列目}) \times 1 + (A \text{ の } 2 \text{ 列目}) \times 0$$

を書き, 2 列目に,

$$(A \text{ の } 1 \text{ 列目}) \times 0 + (A \text{ の } 2 \text{ 列目}) \times 2$$

を書く」という命令と解釈できますから, 対応する基本行列は,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

で与えられることが分かります. 実際, EA という行列を計算してみると,

$$\begin{aligned} EA &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 2d \\ e & 2f \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることが分かります.

問 2.

- (1) 与えられた行列を A と表わすことにして, 行列 A に対して, 行や列に関する基本変形を施してみると, 例えば,

$$\begin{aligned}
 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} &\xrightarrow{1 \text{ 列目}+2 \text{ 列目} \times (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \text{ 行目}+1 \text{ 行目} \times 1} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} &\xrightarrow{3 \text{ 列目}+1 \text{ 列目} \times (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \text{ 行目} \times \frac{1}{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

というように変形できることが分かります. したがって,

$$\text{rank } A = 3$$

となることが分かります.

- (2) 同様にして, 与えられた行列を A と表わすことにして, 行列 A に対して, 行や列に関する基本変形を施してみると, 例えば,

$$\begin{aligned}
 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} &\xrightarrow{3 \text{ 行目} \times \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 1 \text{ 行目}+3 \text{ 行目} \times (-1) \\ 2 \text{ 行目}+3 \text{ 行目} \times (-2) \\ 4 \text{ 行目}+3 \text{ 行目} \times (-2) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{\begin{matrix} 1 \text{ 行目} \leftrightarrow 3 \text{ 行目} \\ 2 \text{ 行目} \leftrightarrow 4 \text{ 行目} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\begin{matrix} 3 \text{ 行目}+2 \text{ 行目} \times (-2) \\ 4 \text{ 行目}+2 \text{ 行目} \times (-3) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \text{ 行目} \times (-\frac{1}{7})} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\begin{matrix} 2 \text{ 行目}+3 \text{ 行目} \times (-4) \\ 4 \text{ 行目}+3 \text{ 行目} \times 11 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

というように変形できることが分かります. したがって,

$$\text{rank } A = 3$$

となることが分かります.

(3) 同様にして、与えられた行列を A と表わすことにして、行列 A に対して、行や列に関する基本変形を施してみると、例えば、

$$\begin{aligned}
 A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow[4 \text{ 行目}+1 \text{ 行目} \times 1]{2 \text{ 行目}+1 \text{ 行目} \times (-2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 列目}+1 \text{ 列目} \times 2} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{4 \text{ 行目}+3 \text{ 行目} \times (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[2 \text{ 列目} \leftrightarrow 3 \text{ 列目}]{2 \text{ 行目} \leftrightarrow 3 \text{ 行目}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

というように変形できることが分かります。したがって、

$$\text{rank } A = 2$$

となることが分かります。

基本変形については、「数学 II 演習 (第 3 回) の略解 : p.2, 2 節」を参照。また、行列の rank については「数学 II 演習 (第 3 回) の略解 : p.10, 3 節」, 「数学 II 演習 (第 4 回) の略解 : p.5, 4 節」などを参照。