S セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 I」
レポート問題 (その 5) の略解

問 1.

(1) いま,

$$
\begin{aligned}
1 &= \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) \cdot (d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + d_4 x^4 + \cdots) \\
&= d_0 + d_1 x + \left(d_2 - \frac{d_0}{2}\right) x^2 + \left(d_3 - \frac{d_1}{2}\right) x^3 + \left(d_4 - \frac{d_2}{2} + \frac{d_0}{4!}\right) x^4 \\
&\quad + \left(d_5 - \frac{d_3}{2} + \frac{d_1}{4!}\right) x^5 + \cdots
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから, x^k, $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ の係数を比較することで,

$$
\begin{cases}
d_0 = 1 \\
d_1 = 0 \\
d_2 - \frac{d_0}{2} = 0 \\
d_3 - \frac{d_1}{2} = 0 \\
d_4 - \frac{d_2}{2} + \frac{d_0}{4!} = 0 \\
d_5 - \frac{d_3}{2} + \frac{d_1}{4!} = 0
\end{cases} \tag{1}
$$

となることが分かります. そこで, (1) 式を順番に解いてみることで,

$$
\begin{cases}
d_0 = 1 \\
d_1 = 0 \\
d_2 = \frac{d_0}{2} = \frac{1}{2} \\
d_3 = \frac{d_1}{2} = 0 \\
d_4 = \frac{d_2}{2} - \frac{d_0}{4!} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4!} = \frac{5}{24} \\
d_5 = \frac{d_3}{2} - \frac{d_1}{4!} = 0
\end{cases}
$$

となることが分かります.

(2) (1) より,

$$
\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{24} x^4 + 0 \cdot x^5 + \cdots
$$

となることが分かります. したがって,

$$\begin{aligned}\tan x &= \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + 0 \cdot x^5 + \cdots\right) \\ &= x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3!}\right)x^3 + \left(\frac{5}{24} - \frac{1}{2 \cdot 3!} + \frac{1}{5!}\right)x^5 + \cdots \\ &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots\end{aligned}$$

となることが分かります.

問 2.

(1) $f(x) = e^{x \sin x}$ より,

$$f(0) = 1 \tag{2}$$

となることが分かります. また,

$$\begin{aligned}f'(x) &= (e^{x \sin x})' \\ &= e^{x \sin x} \cdot (x \sin x)' \\ &= e^{x \sin x} \cdot \{(x)' \sin x + x(\sin x)'\} \\ &= f(x) \cdot (\sin x + x \cos x) \qquad (3)\end{aligned}$$

となることが分かりますから, (2) 式, (3) 式から,

$$\begin{aligned}f'(0) &= f(0) \cdot 0 \\ &= 0 \qquad (4)\end{aligned}$$

となることが分かります. 次に, (3) 式を微分してみると,

$$\begin{aligned}f''(x) &= \{f(x) \cdot (\sin x + x \cos x)\}' \\ &= f'(x) \cdot (\sin x + x \cos x) + f(x) \cdot (\sin x + x \cos x)' \\ &= f'(x) \cdot (\sin x + x \cos x) + f(x) \cdot \{(\sin x)' + (x \cos x)'\} \\ &= f'(x) \cdot (\sin x + x \cos x) + f(x) \cdot (\cos x + \cos x - x \sin x) \\ &= f'(x) \cdot (\sin x + x \cos x) + f(x) \cdot (2 \cos x - x \sin x) \qquad (5)\end{aligned}$$

となることが分かりますから, (2) 式, (4) 式, (5) 式から,

$$f''(0) = f'(0) \cdot 0 + f(0) \cdot 2$$

$$= 2 \tag{6}$$

となることが分かります. さらに, (5) 式を微分してみると,

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \{f'(x)\cdot(\sin x + x\cos x) + f(x)\cdot(2\cos x - x\sin x)\}' \\ &= f''(x)\cdot(\sin x + x\cos x) + f'(x)\cdot(\sin x + x\cos x)' \\ &\quad + f'(x)\cdot(2\cos x - x\sin x) + f(x)\cdot(2\cos x - x\sin x)' \\ &= f''(x)\cdot(\sin x + x\cos x) + f'(x)\cdot(2\cos x - x\sin x) \\ &\quad + f'(x)\cdot(2\cos x - x\sin x) + f(x)\cdot(-3\sin x - x\cos x) \\ &= f''(x)\cdot(\sin x + x\cos x) + 2f'(x)\cdot(2\cos x - x\sin x) \\ &\quad - f(x)\cdot(3\sin x + x\cos x) \end{aligned} \tag{7}$$

となることが分かりますから, (2) 式, (4) 式, (6) 式, (7) 式から,

$$\begin{aligned} f'''(0) &= f''(0)\cdot 0 + 2f'(0)\cdot 2 - f(0)\cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

となることが分かります. よって, (2) 式, (4) 式, (6) 式, (8) 式から,

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ \frac{f''(0)}{2!} = 1,\ \frac{f'''(0)}{3!} = 0$$

となることが分かりますから,

$$e^{x\sin x} = 1 + 0\cdot x + x^2 + 0\cdot x^3 + \cdots$$

となることが分かります.

(2) $x = 0$ のまわりで, $\sin x$ は,

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots \\ &= x\left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \cdots\right) \end{aligned}$$

と展開することができるので, $x\sin x$ は,

$$x\sin x = x^2\left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \cdots\right) \tag{9}$$

というように展開できることが分かります. 一方, $y = 0$ のまわりで, e^y は,

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{3!}y^3 + \cdots$$

と展開できるので, $y = x\sin x$ とすれば,

$$e^{x\sin x} = 1 + x\sin x + \frac{1}{2!}(x\sin x)^2 + \frac{1}{3!}(x\sin x)^3 + \cdots \tag{10}$$

となることが分かります. ここで, (9) 式の $x\sin x$ の展開式には, x について二次式以上の項しか現われないことに注意して, x^6 以下の項のみに注目すると, (9) 式, (10) 式から,

$$\begin{aligned}
e^{x\sin x} &= 1 + x\sin x + \frac{1}{2!}(x\sin x)^2 + \frac{1}{3!}(x\sin x)^3 + \cdots \\
&= 1 + x^2\left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \cdots\right) + \frac{1}{2!}x^4\left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \cdots\right)^2 \\
&\qquad + \frac{1}{3!}x^6\left(1 - \cdots\right)^3 + \cdots \\
&= 1 + x^2 - \frac{1}{3!}x^4 + \frac{1}{5!}x^6 + \cdots + \frac{1}{2!}x^4\left(1 - \frac{2}{3!}x^2 + \cdots\right) + \frac{1}{3!}x^6 + \cdots \\
&= 1 + x^2 + \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{2}\right)x^4 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!}\right)x^6 + \cdots \\
&= 1 + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5!}x^6 + \cdots
\end{aligned}$$

となることが分かります.

Taylor 展開の計算法については,「数学 IB 演習 (第 3 回) の略解： p.8, 7 節； p.9, 8 節；p.14, 9 節」, および,「数学 IB 基礎演習問題 (その１)」を参照.