S セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 I」
レポート問題 (その 4) の略解

問 1.

(1) $n = 0$ のとき, $a_0 = 1$, $\varepsilon_0 = 3$ となることが分かりますから,

$$-2 \leq e \leq 4$$

となることが分かります. 全く同様にして, $n = 1$ のとき, $a_1 = 2$, $\varepsilon_1 = 1.5$ となることが分かりますから,

$$0.5 \leq e \leq 3.5$$

となることが分かります. さらに, $n = 2$ のときには, $a_2 = 2.5$, $\varepsilon_2 = 0.5$ となることが分かりますから,

$$2 \leq e \leq 3$$

となることが分かります.

(2) $n = 2, 3, \cdots, 7$ に対して, 誤差 ε_n を具体的に求めて, その大きさを大まかに評価すると,

n	$\varepsilon_n = \frac{3}{(n+1)!}$
$n = 2$	$\varepsilon_2 = \frac{3}{3 \cdot 2} = \frac{1}{2}$
$n = 3$	$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_2}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
$n = 4$	$\varepsilon_4 = \frac{\varepsilon_3}{5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{40}$
$n = 5$	$\varepsilon_5 = \frac{\varepsilon_4}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{40} = \frac{1}{240} < \frac{1}{100}$
$n = 6$	$\varepsilon_6 = \frac{\varepsilon_5}{7} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{240} = \frac{1}{1680} < \frac{1}{1000}$
$n = 7$	$\varepsilon_7 = \frac{\varepsilon_6}{8} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1680} = \frac{1}{13440} < \frac{1}{10000}$

となることが分かります. 特に,

$$|e - a_7| \leq \varepsilon_7 \leq 0.0001$$

となることが分かりますから,

$$a_7 - 0.0001 \leq e \leq a_7 + 0.0001 \tag{1}$$

となることが分かります. そこで, a_7 を求めるために, $n = 2, 3, \cdots, 7$ に対して, $\frac{1}{n!}$ を順番に求めてみると,

n	$\frac{1}{n!}$
$n=2$	$\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}=0.5$
$n=3$	$\frac{1}{3!}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2!}=\frac{0.5}{3}=0.166666\cdots$
$n=4$	$\frac{1}{4!}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3!}=\frac{0.166666\cdots}{4}=0.041666\cdots$
$n=5$	$\frac{1}{5!}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4!}=\frac{0.041666\cdots}{5}=0.008333\cdots$
$n=6$	$\frac{1}{6!}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5!}=\frac{0.008333\cdots}{6}=0.0013888\cdots$
$n=7$	$\frac{1}{7!}=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6!}=\frac{0.0013888\cdots}{7}=0.00019841\cdots$

となることが分かりますから, これらの値を順番に足してみると,

n	a_n
$n=2$	$a_2=a_1+0.5=2+0.5=2.5$
$n=3$	$a_3=a_2+0.166666\cdots=2.6666\cdots$
$n=4$	$a_4=a_3+0.041666\cdots=2.708333\cdots$
$n=5$	$a_5=a_4+0.008333\cdots=2.71666\cdots$
$n=6$	$a_6=a_5+0.0013888\cdots=2.7180555\cdots$
$n=7$	$a_7=a_6+0.00019841\cdots=2.7182539\cdots$

となることが分かります. したがって, (1) 式と合わせて,

$$2.7181\cdots\leq e\leq 2.7183\cdots$$

となることが分かりますから,

$$e=2.718\cdots$$

となることが分かります.

問 2.

(1) 分子を「多項式の姿」に「化か」して考えてみると,

$$\begin{aligned}\sin x - x\cos x &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) \\ &= \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right)x^3 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{4!}\right)x^4 + \cdots \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots\end{aligned}$$

となることが分かります．よって,

$$\frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{30}x^2 + \cdots$$

となることが分かりますから,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \frac{1}{3}$$

となることが分かります.

(2) 全く同様に, 分子を「多項式の姿」に「化か」して考えてみると,

$$\begin{aligned}x - \log(1+x) &= x - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right) \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots\end{aligned}$$

となることが分かります．よって,

$$\frac{x - \log(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x + \cdots$$

となることが分かりますから,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \log(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

となることが分かります.

ここで,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \tag{2}$$

という $\log(1+x)$ の Taylor 展開は, 例えば, 次のようにして求めることができます．まず,

$$(\log(1+x))' = \frac{1}{1+x} \tag{3}$$

となることに注意します．いま,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

という $\frac{1}{1-x}$ に対する Taylor 展開の式において, $x \rightsquigarrow -x$ と書き直してみると,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \tag{4}$$

となることが分かります．そこで, (3) 式に注意して, (4) 式の両辺を積分してみると, 積分定数を C として,

$$\log(1+x) = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \cdots \tag{5}$$

となることが分かります．さらに, $x = 0$ として, (5) 式の両辺の値を比べてみると, $C = 0$ となることが分かりますから,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \cdots \tag{6}$$

となることが分かります.[1]

Taylor 展開を用いて極限の値を議論することについては「数学 IB 演習 (第 3 回) の問 4」,「数学 IB 演習 (第 4 回) の問 1」,「数学 IB 演習 (第 3 回) の略解：p.17, 11 節」,「数学 IB 演習 (第 4 回) の略解：p.1, 2 節」などを参照.

[1] (4) 式の両辺を不定積分するのではなく, 0 から x まで定積分してみることで, 直接, (6) 式を導くこともできます.