

S セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 I」 レポート問題 (その 4)

問 1. $f(x) = e^x$ として, $f(1) = e$ という値に対して, Taylor の定理を適用すると, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} \quad (1)$$

となる実数 $\theta \in \mathbb{R}$ が 0 と 1 の間に存在することが分かる. そこで, $n \in \mathbb{N}$ として,

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

と定めると, (1) 式から,

$$|e - a_n| = \frac{e^\theta}{(n+1)!} \leq \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!} \quad (2)$$

となることが分かるので,

$$\varepsilon_n = \frac{3}{(n+1)!}$$

として,

$$a_n - \varepsilon_n \leq e \leq a_n + \varepsilon_n \quad (3)$$

となることが分かる. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) $n = 0, 1, 2$ に対して, a_n, ε_n を求めて, (3) 式の不等式を具体的に書き下してみよ.
- (2) $n = 7$ として, (3) 式の不等式を用いることで, e の値を小数点以下 3 桁まで正確に求めよ.

問 2. Taylor 展開を用いて, 分子を「多項式の姿」に「化かし」て考えることにより, 次の極限を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2}$$