Sセメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 I」
レポート問題 (その３) の略解

問 1. いま,

$$\begin{cases} g(t) = f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n-(m-1)} \\ h(t) = (x-t)^{m-1} \end{cases}$$

とすると,

$$\int_0^x g(t)h(t)dt = n! \cdot R_n(x) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \int_0^x h(t)dt &= \int_0^x (x-t)^{m-1}dt \\ &= \left[-\frac{1}{m}(x-t)^m \right]_0^x \\ &= \frac{x^m}{m} \end{aligned} \tag{2}$$

となることが分かります.

したがって, (1) 式, (2) 式から, $x > 0$ のとき, 積分区間 $[0, x]$ 上での関数 $g(t)$ の「重み付きの平均値」A は,

$$\begin{aligned} A &= \frac{\int_0^x g(t)h(t)dt}{\int_0^x h(t)dt} \\ &= \frac{m \cdot n! \cdot R_n(x)}{x^m} \end{aligned} \tag{3}$$

と表わせることが分かります.

全く同様に, $x < 0$ のときには,

$$\check{h}(t) = (t-x)^{m-1} = (-1)^{m-1} \cdot h(t)$$

を「重み」関数であると考えると,[1] 積分区間 $[x, 0]$ 上での関数 $g(t)$ の「重み付きの平均値」A は,

$$\begin{aligned} A &= \frac{\int_x^0 g(t)\check{h}(t)dt}{\int_x^0 \check{h}(t)dt} \\ &= \frac{(-1)^{m-1} \cdot \int_x^0 g(t)h(t)dt}{(-1)^{m-1} \cdot \int_x^0 h(t)dt} \end{aligned}$$

[1] すなわち, $h(t)$ のままでは, m が偶数のとき, 積分区間 $[x, 0]$ 上で $h(t) \leq 0$ となってしまうので, $h(t)$ の代わりに $\check{h}(t) = (t-x)^{m-1}$ を「重み」関数と考えるということです.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-\int_0^x g(t)h(t)dt}{-\int_0^x h(t)dt} \\
&= \frac{\int_0^x g(t)h(t)dt}{\int_0^x h(t)dt} \\
&= \frac{m \cdot n! \cdot R_n(x)}{x^m} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

と表わせることが分かります.

よって, (3) 式, (4) 式から, いずれにしても, $x \neq 0$ のとき, 関数 $g(t)$ の「重み付きの平均値」A は,

$$A = \frac{m \cdot n! \cdot R_n(x)}{x^m} \qquad (5)$$

と表わせることが分かります. 一方,「積分に関する平均値の定理」から,

$$
\begin{aligned}
A &= g(\theta) \\
&= f^{(n+1)}(\theta)(x-\theta)^{n-(m-1)} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

となる実数 $\theta \in \mathbb{R}$ が 0 と x の間に存在することが分かりますから, (5) 式と (6) 式から,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{m \cdot n!}(x-\theta)^{n+1-m}x^m$$

となるような実数 $\theta \in \mathbb{R}$ が 0 と x の間に存在することが分かります.

「積分に関する平均値の定理」については,「数学 IB 演習 (第 2 回) の略解：p.14, 10 節」を参照. また, $m = n+1$ としたときの考察については,「数学 IB 演習 (第 2 回) の略解：p.18, 11 節」を参照. さらに,「Taylor の定理の平均値の定理を用いた証明」については「数学 IB 演習 (第 3 回) の略解：p.27, 15 節」を参照.

問 2.

(1) $f(x) = (1+x)^3$ の微分を順番に求めてみると,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 3(1+x)^2 \\
f''(x) &= 3 \cdot 2(1+x) \\
f'''(x) &= 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
f^{(k)}(x) &= 0, \ (k \geq 4)
\end{aligned}
$$

となることが分かります. したがって,

$$f(0) = 1, \ f'(0) = 3, \ \frac{f''(0)}{2!} = 3, \ \frac{f'''(0)}{3!} = 1, \ \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 0, \ (k \geq 4)$$

となることが分かりますから, 関数 $f(x) = (1+x)^3$ の Taylor 展開は,

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

となることが分かります．すなわち，**多項式関数に対する Taylor 展開とは「二項展開」に他なりません.**

(2) $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ の微分を順番に求めてみると，

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}} \\
f''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}} \\
f'''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (1+x)^{-\frac{5}{2}} \\
f''''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot (1+x)^{-\frac{7}{2}}
\end{aligned}
$$

などとなることが分かりますから，一般に，$k \geq 2$ に対して，

$$
\begin{aligned}
f^{(k)}(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2k-3}{2}\right) \cdot (1+x)^{-\frac{2k-1}{2}} \\
&= (-1)^{k-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-3)}{2^k} \cdot (1+x)^{-\frac{2k-1}{2}}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

となることが分かります.[2] したがって，

$$
\begin{aligned}
&f(0) = 1,\ f'(0) = \frac{1}{2},\ \frac{f''(0)}{2!} = -\frac{1}{8},\ \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{16},\ \frac{f''''(0)}{4!} = -\frac{5}{128} \cdots \\
&\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = (-1)^{k-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-3)}{2^k \cdot k!},\ (k \geq 2)
\end{aligned}
$$

となることが分かりますから，関数 $f(x) = \sqrt{1+x}$ の Taylor 展開は，

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-3)}{2^k \cdot k!} x^k \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots
\end{aligned}
$$

となることが分かります.

(3) $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ の微分を順番に求めてみると，

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1} \\
f''(x) &= \alpha(\alpha-1) \cdot (1+x)^{\alpha-2} \\
f'''(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot (1+x)^{\alpha-3}
\end{aligned}
$$

[2]気になる方は，k に関する数学的帰納法を用いて，(7) 式を確かめてみて下さい.

などとなることが分かりますから, 一般に, $k \geq 1$ に対して,

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)\cdot(1+x)^{\alpha-k} \tag{8}$$

となることが分かります.[3] したがって,

$$f(0)=1,\ f'(0)=\alpha,\ \frac{f''(0)}{2!}=\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!},\ \frac{f'''(0)}{3!}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!},\cdots$$
$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!},\ (k\geq 1)$$

となることが分かりますから, 関数 $f(x)=(1+x)^\alpha$ の Taylor 展開は,

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k \\ &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots\end{aligned} \tag{9}$$

となることが分かります.

いま, $\alpha = m \in \mathbb{N}$ とすると, (9) 式は,

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+mx^{m-1}+x^m \tag{10}$$

という「二項展開」の式に他なりません.[4] その意味で, (9) 式を**「一般二項展開」**と呼んだりします. すなわち, (9) 式と (10) 式の違いは,「$\alpha = m \in \mathbb{N}$ のときには, たまたま, (9) 式の右辺に現われる「無限和」が x^m のところで切れていた」と解釈できるというわけです.

分数ベキ関数の微分や実数ベキ関数の微分については「微分の計算法について : p.19, 3.1 節 ; p.21, 3.2 節」を参照.

[3] 気になる方は, k に関する数学的帰納法を用いて, (8) 式を確かめてみて下さい.
[4] (1) では, $m=3$ の場合を取り上げました.