

S セメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 I」 レポート問題 (その3)

問 1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ 上の何度でも微分できる関数とする. このとき, 微積分学の基本定理を,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$$

という形に書き直して, 右辺の第二項の積分に対して, 部分積分を繰り返すことで, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) \\ R_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \end{aligned} \quad (1)$$

というように, 一般の関数 $f(x)$ を「おつりの項付き」で「 n 次の多項式の姿」に「化かす」ことができる.

そこで, 勝手な自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して, (1) 式の右辺の積分の被積分関数を,

$$\begin{cases} g(t) = f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n-(m-1)} \\ h(t) = (x-t)^{m-1} \end{cases}$$

と分解して, 積分に関する平均値の定理を用いることにより, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ と勝手な実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{m \cdot n!} (x-\theta)^{n+1-m} x^m$$

となるような実数 $\theta \in \mathbb{R}$ が 0 と x の間に存在することを示せ.

[参考 : 積分に関する平均値の定理]

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ という二つの滑らかな関数と, $a < b$ となるような二つの実数 $a, b \in \mathbb{R}$ に対して, 関数 $g(t)$ の区間 $[a, b]$ 上における $h(t)$ という「重み」の掛かった「重み付きの平均値」

$$A = \frac{\int_a^b g(t)h(t)dt}{\int_a^b h(t)dt}$$

を考える. ただし, 積分区間 $[a, b]$ 上で $h(t) \geq 0$ となるものとする. このとき,

$$A = g(\theta)$$

となるような実数 $\theta \in \mathbb{R}$ が a と b の間に存在する. この事実を「**積分に関する平均値の定理**」と言う.

♣ 裏もあります.

問 2.

- (1) $f(x) = (1+x)^3$ とする. このとき, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $f^{(n)}(0)$ を具体的に求めることにより, 関数 $f(x) = (1+x)^3$ の Taylor 展開を求めよ.
- (2) $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ とする. このとき, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $f^{(n)}(0)$ を具体的に求めることにより, 関数 $f(x) = \sqrt{1+x}$ の Taylor 展開を求めよ.
- (3) より一般に, 勝手な実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) = (1+x)^\alpha$ とする. このとき, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $f^{(n)}(0)$ を具体的に求めることにより, 関数 $f(x) = (1+x)^\alpha$ の Taylor 展開を求めよ.