Ｓセメスター 全学体験ゼミナール「じっくり学ぶ数学 I」
レポート問題 (その２) の略解

問１.

(1) いま, $k, l \in \mathbb{N}$ として,

$$e^{z+w} = 1 + (z+w) + \frac{(z+w)^2}{2!} + \frac{(z+w)^3}{3!} + \cdots$$

の右辺の $z^k w^l$ の係数を考えてみます. すると, $z^k w^l$ という項は, $n = k + l$ として,

$$\begin{aligned}\frac{(z+w)^n}{n!} &= \frac{1}{n!}\left(z^n + nz^{n-1}w + \cdots + \frac{n!}{k! \cdot l!}z^k w^l + \cdots + w^n\right) \\ &= \frac{1}{n!}z^n + \frac{1}{(n-1)!}z^{n-1}w + \cdots + \frac{1}{k! \cdot l!}z^k w^l + \cdots + \frac{1}{n!}w^n\end{aligned}$$

という項から現われることが分かりますから, その係数は,

$$\frac{1}{k! \cdot l!}$$

となることが分かります. したがって,

$$e^{z+w} = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{1}{k! \cdot l!} z^k w^l \tag{1}$$

と表わせることが分かります. 全く同様に,

$$e^z \cdot e^w = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right)\left(1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \cdots\right)$$

の右辺の $z^k w^l$ の係数を考えてみます. すると, $z^k w^l$ という項は,

$$\begin{aligned}&\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^k}{k!} + \cdots\right)\left(1 + w + \frac{w^2}{2!} + \cdots + \frac{w^l}{l!} + \cdots\right) \\ &= 1 + z + w + \cdots + \frac{1}{k! \cdot l!}z^k w^l + \cdots\end{aligned}$$

という形で現われることが分かりますから, その係数は,

$$\frac{1}{k! \cdot l!}$$

となることが分かります. したがって,

$$e^z \cdot e^w = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{1}{k! \cdot l!} z^k w^l \tag{2}$$

と表わせることが分かります．よって, (1) 式, (2) 式から,

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \tag{3}$$

となることが分かります．

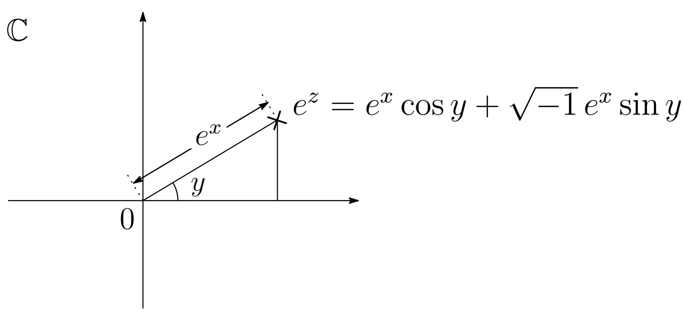
(2) いま, (3) 式と Euler の公式

$$e^{\sqrt{-1}\theta} = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta \tag{4}$$

から, $z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+\sqrt{-1}y} \\ &= e^x \cdot e^{\sqrt{-1}y} && (\,(3)\ \text{式より}\,) \\ &= e^x \cdot \bigl(\cos y + \sqrt{-1}\sin y\bigr) && (\,(4)\ \text{式より}\,) \\ &= e^x \cos y + \sqrt{-1}\, e^x \sin y \end{aligned}$$

となることが分かります．よって, 複素平面上で, $e^z \in \mathbb{C}$ は図のような点を表わすことが分かります．



(3) いま, (4) 式から,

$$e^{\sqrt{-1}(\theta+\eta)} = \cos(\theta+\eta) + \sqrt{-1}\sin(\theta+\eta) \tag{5}$$

となることが分かります．一方,

$$\begin{cases} e^{\sqrt{-1}\theta} = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta \\ e^{\sqrt{-1}\eta} = \cos\eta + \sqrt{-1}\sin\eta \end{cases}$$

という式の両辺を掛け算してみると,

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{-1}\theta} \cdot e^{\sqrt{-1}\eta} &= (\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)(\cos\eta + \sqrt{-1}\sin\eta) \\ &= (\cos\theta\cos\eta - \sin\theta\sin\eta) \\ &\qquad + \sqrt{-1}\cdot(\sin\theta\cos\eta + \cos\theta\sin\eta) \end{aligned} \tag{6}$$

となることが分かります. よって, (5) 式, (6) 式から,

$$e^{\sqrt{-1}(\theta+\eta)} = e^{\sqrt{-1}\theta} \cdot e^{\sqrt{-1}\eta} \iff \begin{cases} \cos(\theta+\eta) = \cos\theta\cos\eta - \sin\theta\sin\eta \\ \sin(\theta+\eta) = \sin\theta\cos\eta + \cos\theta\sin\eta \end{cases}$$

となることが分かります. これは, 皆さん良くご存じの「三角関数の加法定理」に他なりません.

問 2.

(1) 問題文中でも注意したように, 微積分学の基本定理より,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt \tag{7}$$

と表わせることが分かります. そこで,

$$\begin{aligned} f'(t) &= 1 \cdot f'(t) \\ &= \frac{d}{dt}\{(t+C)\} \cdot f'(t) \end{aligned}$$

と考えて, (7) 式の右辺第二項の積分に対して部分積分を試みると,

$$\begin{aligned} \int_0^x f'(t)dt &= \int_0^x \frac{d}{dt}\{(t+C)\} \cdot f'(t)dt \\ &= [(t+C)f'(t)]_0^x - \int_0^x (t+C)f''(t)dt \\ &= (x+C)f'(x) - Cf'(0) - \int_0^x (t+C)f''(t)dt \end{aligned} \tag{8}$$

となることが分かります. したがって, (7) 式に (8) 式を代入することで,

$$f(x) = f(0) + (x+C)f'(x) - Cf'(0) - \int_0^x (t+C)f''(t)dt \tag{9}$$

となることが分かります. ここで, (9) 式を, 目標とする

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots$$

という式と見比べてみると, $C = -x$ と取ることで,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x - \int_0^x (t-x)f''(t)dt \tag{10}$$

となることが分かります.

(2) (1) と同様に,

$$(t-x)\cdot f''(t)=\frac{d}{dt}\left\{\frac{(t-x)^2}{2}\right\}\cdot f''(t)$$

と考えて, (10) 式の右辺第三項の積分に対して部分積分を試みると,[1]

$$\begin{aligned}\int_0^x (t-x)f''(t)dt &= \int_0^x \frac{d}{dt}\left\{\frac{(t-x)^2}{2}\right\}\cdot f''(t)dt \\ &= \left[\frac{(t-x)^2}{2}f''(t)\right]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x (t-x)^2 f'''(t)dt \\ &= -\frac{f''(0)}{2!}x^2 - \frac{1}{2!}\int_0^x (t-x)^2 f'''(t)dt \end{aligned} \tag{11}$$

となることが分かります. よって, (11) 式を (10) 式に代入することで,

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{1}{2!}\int_0^x (t-x)^2 f'''(t)dt \tag{12}$$

となることが分かります.

(3) 念のために,

$$(t-x)^2\cdot f'''(t)=\frac{d}{dt}\left\{\frac{(t-x)^3}{3}\right\}\cdot f'''(t)$$

と考えて, (12) 式の右辺第四項の積分に対して部分積分を試みると,

$$\begin{aligned}f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3 \\ -\frac{1}{3!}\int_0^x (t-x)^3 f^{(4)}(t)dt\end{aligned} \tag{13}$$

となることが分かります.[2] そこで, (7) 式, (10) 式, (12) 式, (13) 式を並べて書いてみると,

$$\begin{aligned}
f(x)&=f(0)+\int_0^x f'(t)dt \\
f(x)&=f(0)+f'(0)x-\int_0^x (t-x)f''(t)dt \\
f(x)&=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{1}{2!}\int_0^x (t-x)^2 f'''(t)dt \\
f(x)&=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3-\frac{1}{3!}\int_0^x (t-x)^3 f^{(4)}(t)dt
\end{aligned}$$

[1] ここで, $(t-x)$ の原始関数として, $\frac{(t-x)^2}{2}$ を取れば上手くいくということに, すぐに気が付くとは限りませんから, 気になる方は, (1) と同様に, C' を定数として,

$$(t-x)=\frac{d}{dt}\left\{\frac{t^2}{2}-xt+C'\right\}$$

として部分積分を行なってみて下さい.

[2] 皆さん, 確かめてみて下さい.

となりますが, これらの式をじっと眺めると, 一般に, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &\quad + \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x (t-x)^n f^{(n+1)}(t)dt \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &\quad + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \end{aligned} \tag{14}$$

という式が成り立ちそうなことが分かります.

そこで, (14) 式を数学的帰納法を用いて確かめてみることにします. まず, $n = 0$ のときには, 微積分学の基本定理から,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$$

となることが分かりますから, (14) 式が成り立つことが分かります. 次に, $k \in \mathbb{N}$ として, $n = k$ のとき, (14) 式が成り立つと仮定してみます. すなわち,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \\ &\quad + \frac{1}{k!}\int_0^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)dt \end{aligned} \tag{15}$$

となると仮定してみます. このとき,

$$(x-t)^k \cdot f^{(k+1)}(t) = \frac{d}{dt}\left\{-\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1}\right\} \cdot f^{(k+1)}(t)$$

と考えて, (15) 式の右辺の積分にに対して部分積分を試みると,

$$\begin{aligned} \int_0^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)dt &= \int_0^x \frac{d}{dt}\left\{-\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1}\right\} \cdot f^{(k+1)}(t)dt \\ &= \left[-\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1} f^{(k+1)}(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{k+1}}{k+1} f^{(k+2)}(t)dt \\ &= \frac{x^{k+1}}{k+1} f^{(k+1)}(0) + \frac{1}{k+1}\int_0^x (x-t)^{k+1} f^{(k+2)}(t)dt \end{aligned} \tag{16}$$

となることが分かります. よって, (15) 式に (16) 式を代入することで,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}x^{k+1} \\ &\quad + \frac{1}{(k+1)!}\int_0^x (x-t)^{k+1} f^{(k+2)}(t)dt \end{aligned}$$

となることが分かりますから, $n = k + 1$ に対しても, (14) 式が成り立つことが分かります. 以上から, 勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, (14) 式が成り立つことが分かります.

「三角関数や指数関数の Taylor 展開」, 及び, 関連する話題については,「数学 II 演習 (第 2 回) : p.15, 8 節 ; p.16, 9 節 ; p.18, 10 節」を参照. また,「 $\frac{1}{1-x}$ の Taylor 展開」については,「数学 IB 演習 (第 2 回) の略解 : p.7, 6 節」を参照. さらに,「微積分の基本定理にもとづく Taylor の定理」については,「数学 IB 演習 (第 2 回) : p.10, 8 節」を参照.